Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 238–239

УДК 517.927.4

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ И СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© А. Н. Наимов

nan67@rambler.ru

Вологодский государственный технический университет, Вологда

Рассматривается вопрос об априорной оценке и существовании ω-периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$z'' = \overline{(z' - B_1(z))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z' - B_r(z))^{m_r}} + f(t, z, z'), \tag{1}$$

где $\omega > 0$, $z = x + iy \in \mathrm{C}$, C — пространство комплексных чисел, верхняя черта означает комплексное сопряжение, $r, m_1, \ldots, m_r$ — натуральные числа, $m = m_1 + \ldots + m_r$, $(B_1, \ldots, B_r) \in M_r$, $f \in R_{\omega,m}$. Здесь M_r — множество всех r упорядоченных отображений $(A_1, \ldots, A_r)$, каждое из которых непрерывно действует из C в C, положительно однородное порядка 1: $A_j(\lambda z) \equiv \lambda A_j(z) \quad \forall \lambda > 0$, $j = 1, \ldots, r$, а множество $R_{\omega,m}$ состоит из отображений $g(t, z_1, z_2)$, непрерывно действующих из $\mathrm{R} \times \mathrm{C} \times \mathrm{C}$ в C, ω-периодических по t и удовлетворяющих условию

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \to \infty} (|z_1| + |z_2|)^{-m} \max_{0 \le t \le \omega} |g(t, z_1, z_2)| = 0.$$

Априорная оценка и существование ω-периодических решений для систем вида (1) в случае $r = 1$ исследовано в работе [1], а в случае $r = 2$, $m_1 = m_2 = 1$ в работе [2]. В настоящей работе рассматривается общий случай.

Теорема 1. *Пусть $(B_1, \ldots, B_r) \in M_r$ и $f \in R_{\omega,m}$. Тогда существует число $C_1 = C_1(B_1, \ldots, B_r, f) > 0$ такое, что для любого ω-периодического решения $z(t)$ системы (1) справедливо неравенство*

$$|z'(t)| < C_1(1 + |z(t)|) \quad \forall t \in [0, \omega].$$

Теорема 2. *Пусть $(B_1, \ldots, B_r) \in M_r$, $f \in R_{\omega,m}$ и отображения $B_1, \ldots, B_r$ удовлетворяют условиям:*

1) при каждом $j = 1, \ldots, r$ система $w' = B_j(w)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений;

2) $B_{j_1}(z) \neq B_{j_2}(z) \quad \forall z \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$, $j_1 \neq j_2$;

3) при каждом фиксированном $z_0 \in \mathrm{C}$ система

$$w' = \overline{(w - B_1(z_0))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (w - B_r(z_0))^{m_r}}$$

не имеет нестационарных ограниченных траекторий.

Тогда для любого ω-периодического решения $z(t)$ системы (1) имеет место оценка

$$|z(t)| + |z'(t)| < C_2 \quad \forall t \in [0, \omega],$$

где $C_2 = C_2(B_1, \ldots, B_r, f) > 0$.

В работе [3] исследованы условия, когда система

$$w' = \overline{(w-c_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(w-c_r)^{m_r}}$$

при фиксированных $c_1,\ldots,c_r \in \mathrm{C}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий. В частности, условие 3) теоремы 2 будет выполнено, если при каждом фиксированном $z_0 \in \mathrm{C}\setminus\{0\}$ попарно различны значения $V_{m+1}(B_1(z_0)),\ldots,V_{m+1}(B_r(z_0))$, где $V_{m+1}(z) = Im\int_0^z(\zeta - B_1(z_0))^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\zeta-B_r(z_0))^{m_r}d\zeta$.

Наборы отображений $(B_{1,1},\ldots,B_{1,r})$, $(B_{2,1},\ldots,B_{2,r}) \in M_r$ назовем гомотопными, если существует семейство $(A_1(\cdot,\lambda),\ldots,A_r(\cdot,\lambda)) \in M_r$, $0\le\lambda\le 1$, непрерывно зависящее от λ, удовлетворяющее условиям 1)–3) теоремы 2 при каждом $\lambda\in[0,1]$, совпадающее с первым набором при $\lambda=0$ и вторым набором при $\lambda=1$.

Теорема 3. *Пусть наборы отображений* $(B_{1,1},\ldots,B_{1,r})$, $(B_{2,1},\ldots,B_{2,r}) \in M_r$ *гомотопны и пусть при* $B_1=B_{1,1},\ldots,B_r=B_{1,r}$ *и любых* $f\in R_{\omega,m}$ *система (1) имеет* ω*-периодическое решение. Тогда система (1) имеет* ω*-периодическое решение при* $B_1=B_{2,1},\ldots,B_r=B_{2,r}$ *и любых* $f\in R_{\omega,m}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и* $m_1\gamma(B_1)+\ldots+m_r\gamma(B_r)\neq 0$, *где* $\gamma(B_j)$ *— вращение векторного поля* B_j *на единичной окружности* $S=\{z\in\mathrm{C}:|z|=1\}$. *Тогда для системы (1) существует хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наимов А. Н., Хакимов Р. И.* О разрешимости одной нелинейной периодической задачи // Доклады АН РТ. 2001. Т. 44, № 3. С. 35–40.
2. *Наимов А. Н.* О периодических решениях одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости // Материалы Воронежской весенней математической школы, Воронеж. 2006. С. 119.
3. *Наимов А. Н.* Об ограниченных траекториях одного класса автономных систем на плоскости // Материалы Воронежской зимней математической школы, Воронеж. 2007. С. 158.