Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 240–241

УДК 517.95

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ

© А. М. Нахушев

niipma@mail333.com

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

Доклад посвящен краевым и внутреннекраевым задачам со смещением для основных типов локальных и нелокальных уравнений в частных производных, которые лежат в основе математических моделей различных физико-биологических процессов.

Хорошо известно, что проблема поиска аналога задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, привела к качественно новым краевым задачам, названным автором в 1968 г. краевыми задачами со смещением [1–4].

Пусть Ω — конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z = x+iy$, ограниченная одним простым контуром Ляпунова σ. К краевым задачам со смещением для голоморфных в области Ω функций $\Phi(z) = u + iv$ относится задача, сформулированная еще Риманом в следующих его предложениях:

"Разделим, например, границу на n частей и каждой точке на одной части сопоставим $n-1$ точек из других частей — по одной из каждой части, а затем свяжем значения u и v в этих n точках n уравнениями, изменяющимися непрерывно при изменении положения n выбранных точек. Эти условия, совокупность которых образует непрерывное множество и которые выражаются посредством уравнений, связывающих произвольные функции, являются, вообще говоря, необходимыми и достаточными для определения функции, всюду непрерывной в данной области, только при дальнейшем ограничении, именно, при добавлении равенств, связывающих входящие произвольные постоянные".

К классу краевых задач с нелокальным смещением относится обобщенная задача Римана – Гильберта – Пуанкаре, впервые сформулированная и исследованная И. Н. Векуа [4, с. 59; 5].

Метод Трикоми решения краевых задач для уравнений Чаплыгина и Лаврентьева – Бицадзе редуцирует их к эллиптическим (гиперболическим) краевым задачам с нелокальным смещением на части границы.

То же самое наблюдается при реализации функционально-аналитических методов решения локальных краевых задач линейного сопряжения уравнений в частных производных. В частности, задача Трикоми для уравнения $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ в стандартной смешанной области сводится к краевой задаче, когда на эллиптической части границы задается условие Дирихле, на участке $0 < x < r$ звуковой линии $y = 0$ – наклонная дробная производная от функции $u = u(x,y)$: $u_y(x,0) - \gamma D_{0x}^{2/3} u(t,0) = f(x)$, где $\gamma = \mathrm{const} > 0$, $D_{0\xi}^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования порядка α с началом и концом в точках 0, $\xi > 0$, $f(x)$ — заданная функция [6, с. 23]. Аналогично, краевая задача: $u(-r,y) = \varphi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant T$, $u(x,0) = \tau(x)$, $x \geq -r$ для уравнения теплопроводности

$$u_y = u_{xx} \tag{1}$$

с условием сопряжения $u_y(-0,y) = \lambda u_y(+0,y)$, $u(-0,y) = u(+0,y)$ и условием Тихонова: $\lim\limits_{x\to\infty} \max\limits_{[0,T]} |u| \exp(-\varepsilon x^2) = 0$, $\varepsilon > 0$, порождает для этого же уравнения в прямоугольной области $-r < x < 0$, $0 < t < T$ следующую нелокальную задачу: $u(x,0) = \tau(x)$, $-r \leqslant x \leqslant 0$, $u(-r,y) = \varphi(y)$, $0 \leqslant y \leqslant T$, $u_x(-0,y) = G(y) D_{0y}^{1/2} u(-0,t) + g(y)$, $G(y) = -\lambda$, а $g(y) \equiv 0$, если $\tau(x) = 0$ при $x \geq 0$.

Доклад состоит из следующих частей:

1) Задача Фурье и задачи первого и второго классов по терминологии В. А. Стеклова и их связь с усиленно регулярными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с распределенными граничными условиями;

2) Задача с нелокальным смещением для уравнений с операторами Фурье и Аллера в главной части;

3) Задачи с локальным и нелокальным сдвигом для гиперболического и смешанного типов уравнений;

4) Задача Бицадзе – Самарского и ее связь с задачей Дирихле для нагруженных уравнений эллиптического типа;

5) Технология описания необходимых краевых условий с локальным и нелокальным смещениями.

Акцент делается на технологии редукции задачи Самарского к корректным локальным краевым задачам для уравнений параболического типа. Она весьма проста в случае уравнения (1) в области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < r,\ 0 < y < T\}$ с начальным и граничными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r; \tag{2}$$

$$u_x(0,y) = u_x(r,y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T; \tag{3}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что функция $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \sigma_{0y} \cup \sigma_{ry})$, $\sigma_{ay} = \{(a,y): 0 < y < T\}$, $u_x(0,y)$ и $u_x(r,y) \in L[0,T]$, начальная функция $\tau(x) \in C^1[0,r]$.

В основе технологии лежат следующие утверждения.

1. Любое регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) представимо в виде суммы $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ двух его решений: $v(x,y) = [u(x,y) + u(\theta,y)]/2$, $w(x,y) = [u(x,y) - u(\theta,y)]/2$, где $\theta = r - x$.

2. В силу (2)

$$v(x,0) = \tau_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r; \tag{5}$$

$$w(x,0) = \tau_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{6}$$

где $2\tau_1(x) = \tau(x) + \tau(r-x)$, $2\tau_2(x) = \tau(x) - \tau(r-x)$.

3. Согласно (3)

$$v_x(0,y) = 0, \quad v_x(r,y) = 0, \quad 0 < y < T. \tag{7}$$

4. В силу же (4)

$$w(0,y) = -v(0,y), \quad w(r,y) = v(r,y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{8}$$

Задача (1)–(4) свелась к первой: (5), (7) и второй: (6), (8) краевым задачам для уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С 44–59.
2. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С 736–739.
3. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С 92–101.
4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. ISBN 5-02-034076-6.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.