

УДК 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СО СЛАБОУСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© И. Д. Нуров

nid1@mail.ru

Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Математическое моделирование часто требует детального изучения динамических систем, содержащих параметры. Одними из наиболее интересных явлений при изучении таких систем представляются различные бифуркации, означающие качественную перестройку функционирования системы. Обнаружение бифуркации является одним из важных этапов исследования динамической системы.

В настоящем докладе основным объектом является дифференциальное уравнение вида

$$x' = A(\lambda)x + a(x, \lambda), \quad (1)$$

где $A(\lambda)$ — квадратная матрица, непрерывно зависящая от скалярного параметра λ , $a(x, \lambda)$ — нелинейная функция, причем $a(x, \lambda) = o(|x|)$, $|x| \rightarrow 0$. К уравнению вида (1) сведены многие практические задачи, в частности, уравнение гармонического осциллятора или уравнение математического маятника $\varphi'' + \sin \varphi = 0$. Вопрос о существовании бифуркации малых ненулевых решений уравнений (1) исследован многими авторами [1–3]. При исследовании задач о точках бифуркации условно можно выделить два основных направления.

Первое связано с предположением, что рассматриваемые параметры системы являются фиксированными, т. е. не изменяются со временем.

Второе направление исследований связано с предположением о том, что параметры системы эволюционируют в окрестности точки бифуркации по какому либо закону.

Изучается случай, когда параметр λ в системе (1) меняется по закону $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon t$ или $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \sin \varepsilon t$. Предполагается, что выполнено условие отсутствия резонанса $T \neq \frac{2\pi k}{\omega_0}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Уравнение (1) принимает вид

$$x' = A[\lambda_0 + \delta\varphi(t)]x + a[x, \lambda_0 + \delta\varphi(t)], \quad (2)$$

здесь $\varphi(t)$ — периодическая функция, $\delta > 0$. Бифуркация Андронова – Хопфа в системе возможна лишь тогда, когда матрица $A(\lambda_0)$ имеет собственные значения на мнимой оси.

У1. Матрица $A(\lambda_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, при этом остальные собственные значения матрицы $A(\lambda_0)$ имеют отрицательные вещественные части.

У2. $\gamma \neq 0$, где $\gamma = (A'e, e^*) + (A'g, g^*)$ и $A' = A'(\lambda_0)$, а (e, g, e^*, g^*) — векторы, соответствующие матрицам A и A^* . Положим

$$\varphi_0 = \int_0^T \varphi(\tau) d\tau.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $\gamma\varphi_0 < 0$, тогда $x = 0$ является асимптотически устойчивым решением уравнения (1) при малых $\delta > 0$. Пусть $\gamma\varphi_0 > 0$, тогда $x = 0$ является неустойчивым решением уравнения (2) при малых $\delta > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия У1 и У2 и $\varphi_0 \neq 0$. Тогда $\delta = 0$ является точкой бифуркации малых колебаний системы(2).

В качестве примера рассмотрено классическое уравнение Ван дер Поля

$$x'' + (3x^2 - \lambda)x + x = 0. \quad (3)$$

Пусть параметр λ уравнения (3) слабо осциллирует по закону $\lambda = \delta\varphi(t)$, где $\varphi(t+P) \equiv \varphi(t)$, т. е. рассмотрим уравнение

$$x'' + (3x^2 - 0,1\varphi(t))x' + x = 0. \quad (4)$$

Проведено компьютерное моделирование уравнения (4) для различных функций $\varphi(t)$. Рассмотрена ситуация, когда условия теорем 1 и 2 не выполнены, т. е. исследован резонансный случай, при этом $\varphi_0 = 0$. В этом случае, как показывают вычисления, в окрестности нуля возникают устойчивые почти периодические колебания, однако, их формула далека от периодической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
4. Нуров И. Д., Юмагулов М. Г. // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 34–40.
5. Красносельский М. А., Юмагулов М. Г. // Доклады РАН. 1999. Т. 365, № 2. С. 162–164.