УДК 517.9

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Б. Б. Ошоров

oshorovbb@pochta.ru

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ

В докладе речь пойдет об эллиптических по Петровскому системах уравнений, которые не являются сильно эллиптическими. Автора в первую очередь заинтересовал тот факт, что системы уравнений в частных производных существенно отличаются от одного уравнения с точки зрения постановки корректных задач, чего нет в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для одного эллиптического уравнения второго порядка корректной является задача Дирихле. В то же время хорошо известен пример А. В. Бицадзе системы уравнений второго порядка, для которой нарушается единственность решения задачи Дирихле. Этот интерес привел к поиску корректных постановок иных краевых задач для этой системы уравнений. При этом задачи названы краевыми потому, что никакая часть границы области, где они рассматриваются, не освобождается от задания каких-то условий, в отличие, скажем, от задачи Коши или смешанной задачи.

Пусть $D \subseteq R^2$ — произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $\bar{n} = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. На функциях $u(z) = u_1(x,y) + iu_2(x,y)$, определенных в этой области, задаем дифференциальный оператор первого порядка $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Этот оператор называют оператором Коши – Римана. Тогда упомянутая выше система уравнений, которая называется системой Бицадзе, примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0$.

В области D рассматриваем системы уравнений

$$L_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + a(z)u + b(z)\bar{u} = f(z), \quad L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + Tu = f(z),$$

где T — некоторый дифференциальный оператор первого порядка, а чертой обозначено комплексное сопряжение. Эти системы уравнений будем называть обобщенными системами уравнений Коши – Римана и Бицадзе, соответственно.

Разобьем границу области на части следующим образом

$$\Gamma^+ = \{z \in \Gamma | n_1 > 0\}, \quad \Gamma^- = \{z \in \Gamma | n_1 < 0\}, \quad \Gamma^0 = \Gamma \backslash (\overline{\Gamma^+ \cup \Gamma^-}).$$

Предлагаются следующие задачи.

Задача 1. В области D найти решение обобщенной системы уравнений Коши – Римана, удовлетворяющее условиям $u_1|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = u_2|_{\Gamma^+} = 0$.

Задача 2. В области D найти решение обобщенной системы уравнений Бицадзе, удовлетворяющее условиям $u_1|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = u_2|_{\Gamma^+} = Re\, u_{\bar{z}}|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = Im\, u_{\bar{z}}|_{\Gamma^+} = 0$.

Тогда справедливы

Теорема 1. *Если для функций $a(z)$, $b(z) \in C(\bar{D})$ существует достаточно малое число $\alpha > 0$, такое, что $|au + b\bar{u}| \leqslant \alpha|u|$, то для $\forall f(z) \in L_2(D)$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи 1 $u(z) \in W_2^1(D)$.*

Теорема 2. *Если $Tu \equiv a(z)u_{\bar{z}} + b(z)\bar{u}_z$ и коэффициенты этого оператора удовлетворяют условиям теоремы 1, то для любой функции $f(z) \in L_2(D)$ задача 2 имеет единственное решение $u(z) \in \tilde{W}_2^2(D)$.*

Поскольку любая эллиптическая система уравнений первого порядка относительно функций двух переменных с помощью неособого преобразования сводится к обобщенной системе уравнений Коши – Римана [1], то для них могут быть предложены постановки краевых задач, сводящихся к задаче 1. Если же эллиптический оператор второго порядка является второй степенью эллиптического оператора первого порядка, то для них могут быть поставлены краевые задачи, приводящиеся к задаче 2. Таким образом, для достаточно широкого класса эллиптических систем уравнений второго порядка оказываются корректными задачи типа задач Римана – Гильберта с разрывными краевыми условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: ГИФМЛ, 1959.