Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 247–247

УДК 517.9

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ СТЕПЕННОГО РОСТА

© В. Н. Павленко

pavlenko@csu.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Рассматривается первая краевая задача для уравнения параболического типа

$$Lu(x,t) = \varepsilon g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \tag{2}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2, $T > 0$, ε — параметр. Здесь

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\partial_{x_j} + a(x,t)$$

— равномерно параболический линейный дифференциальный оператор второго порядка в Q_T с коэффициентами из пространства $C^{0,\alpha}(Q_T)$ ($0 < \alpha < 1$), Γ_T — параболическая граница цилиндра Q_T, функция $g : Q_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева $\pmod 0$ [1] и для почти всех $(x,t) \in Q_T$ сечение $g(x,t,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода и $g(x,t,u) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$, $g_-(x,t,u) = \liminf\limits_{\eta\to u} g(x,t,\eta)$, $g_+(x,t,u) = \limsup\limits_{\eta\to u} g(x,t,\eta)$. Исследуется разрешимость задачи (1), (2) в пространстве $W^{2,1}_q(Q_T)$, $q > 1$, при малых значениях параметра ε.

Решением задачи (1), (2) называется функция $u \in W^{2,1}_q(Q_T)$, след которой на Γ_T равен нулю, удовлетворяющая для почти всех $(x,t) \in Q_T$ включению

$$Lu(x,t) \in [\varepsilon g_-(x,t,u), \varepsilon g_+(x,t,u)].$$

Теорема. *Предположим, что существуют постоянная $a > 0$ и функция $b \in L^q(Q_T)$ такие, что для почти всех $(x,t) \in Q_T$*

$$|g(x,t,u)| \le a|u|^\mu + b(x,t), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

где μ любое положительное число, если $q \ge \frac{n+2}{2}$, и $\mu < \frac{n+2}{n+2-2q}$, если $q < \frac{n+2}{2}$. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого ε с $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ задача (1), (2) имеет решение в $W^{2,1}_q(Q_T)$.

Замечание. Ограничение на степень роста нелинейности в теореме обеспечивает компактность вложения $W^{2,1}_q(Q_T)$ в пространство $L^{\mu q}(Q_T)$. В частности, для $q = 2$ допустимая степень $\mu < \frac{n+2}{n-2}$ при $n > 2$.

По сравнению с [2] в теореме ослаблены ограничения на степень роста нелинейности.

Доказательство теоремы сводится к принципу неподвижной точки для многозначного компактного отображения Боненбласта – Карлина [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта р_урал_а № 07-01-96000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.
2. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. 1994. Т. 45, № 6. С. 729–736.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В.В* . Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 216 с.