*Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 250–251*

*УДК 517.955*

# СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ГУРСА – ДАРБУ

**© Н. И. Погодаев**

npogo@mail.ru

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск*

Пусть $I_1 = [0,a]$, $I_2 = [0,b]$, $a,b > 0$, $\Omega = I_1 \times I_2$; $X$ и $Y$ — $n$-мерное и $m$-мерное евклидовы пространства.

Рассмотрим управляемую систему с граничными и распределенными управлениями:

$$z_{xy} = c_1(x,y,z)z_x + c_2(x,y,z)z_y + c_3(x,y,z) + c_4(x,y,z)u, \tag{1}$$

$$z(x,0) = \varphi(x) + \int_0^x u^1(s)\,ds,\ z(0,y) = \psi(y) + \int_0^y u^2(t)\,dt,\ \varphi(0) = \psi(0), \tag{2}$$

$$u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)). \tag{3}$$

Здесь $c_1, c_2 \colon \Omega \times X \to \mathscr{L}(X;X)$, $c_3 \colon \Omega \times X \to X$, $c_4 \colon \Omega \times X \to \mathscr{L}(Y;X)$ — однозначные отображения; $U \colon \Omega \times X \to Y$, $U_1 \colon I_1 \times X \to X$, $U_2 \colon I_2 \times X \to X$ — многозначные отображения с компактными значениями; $\mathscr{V}_1 \colon C(\Omega;X) \to C(I_1;X)$, $\mathscr{V}_2 \colon C(\Omega;X) \to C(I_2;X)$ — непрерывные операторы; $\varphi$, $\psi$ — абсолютно непрерывные функции.

Наряду с ограничениями (3) будем также рассматривать ограничения

$$u(x,y) \in \operatorname{co} U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in \operatorname{co} U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in \operatorname{co} U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)) \tag{4}$$

и

$$u(x,y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)), \tag{5}$$

где символ $\operatorname{co} E$ обозначает выпуклую оболочку множества $E$, а $\operatorname{ext}\operatorname{co} E$ — совокупность всех крайних точек множества $\operatorname{co} E$.

Пусть $W^p(\Omega;X)$ — пространство функций $f \colon \Omega \to X$, представимых в виде

$$f(x,y) = f(0,0) + \int_0^x g^1(s)\,ds + \int_0^y g^2(t)\,dt + \int_0^x\int_0^y g(s,t)\,ds\,dt, \tag{6}$$
$$g \in L^p(\Omega;X),\ g^1 \in L^p(I_1;X),\ g^2 \in L^p(I_2;X).$$

Известно, что функции $f \in W^p(\Omega;X)$ абсолютно непрерывны в смысле [1] и для них существуют обобщенные производные $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$ в смысле [2]:

$$f_x(x,y) = g^1(x) + \int_0^y g(x,t)\,dt,\quad f_y(x,y) = g^2(y) + \int_0^x g(s,y)\,ds,\quad f_{xy}(x,y) = g(x,y). \tag{7}$$

Исходя из (6) и (7), введем

Определение. Решением системы (1)–(3) называется четверка $(z,u,u^1,u^2)$, $z \in W^p(\Omega;X)$, $u \in L^p(\Omega;Y)$, $u^1 \in L^p(\Omega;X)$, $u^2 \in L^p(\Omega;X)$, такая, что

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x u^1(s)\,ds + \int_0^y u^2(t)\,dt + \int_0^x\int_0^y v(s,t)\,ds\,dt,$$

где $\quad v(x,y) = c_1(x,y,z)z_x + c_2(x,y,z)z_y + c_3(x,y,z) + c_4(x,y,z)u,$

и почти всюду имеют место включения (3). Аналогично определяются решения систем (1), (2), (4) и (1), (2), (5). Множества решений системы (1) с ограничениями (3), (4), (5) обозначим соответственно $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\rm co}$, $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$. Элементы множества $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$ мы называем экстремальными решениями.

При достаточно стандартных предположениях о функциях $c_i$, $i = 1, \dots, 4$, $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$, $U$, $U_1$, $U_2$ имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Множества $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\rm co}$, $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$ не пусты и $\mathscr{R}_{\rm co}$ является компактом в пространстве*

$$C(\Omega; X) \times w\text{-}L^p(\Omega; Y) \times w\text{-}L^p(I_1; X) \times w\text{-}L^p(I_2; X). \tag{8}$$

*Здесь $w\text{-}L^p(\Omega; Y)$, $w\text{-}L^p(I_1; X)$ $w\text{-}L^p(I_2; X)$ — пространства $L^p(\Omega; Y)$, $L^p(I_1; X)$ $L^p(I_2; X)$, наделенные слабой топологией.*

Изучение множества $\mathscr{R}_{\rm co}$ можно свести к изучению множества неподвижных точек $\mathrm{Fix}\,(\mathcal{F})$ определенным образом построенного многозначного отображения $\mathcal{F}\colon K \to K$, где $K$ — выпуклое компактное подмножество пространства $w\text{-}L^p(\Omega; X) \times w\text{-}L^p(I_1; X) \times w\text{-}L^p(I_2; X)$. При этом существует непрерывное инъективное отображение

$$T\colon \mathrm{Fix}\,(\mathcal{F}) \to \mathscr{R}_{\rm co}.$$

**Теорема 2.** *Для любой точки $w \in \mathrm{Fix}\,(\mathcal{F})$ существует непрерывный селектор $f$ многозначного отображения $\mathcal{F}$, такой, что $w \in \mathrm{Fix}\,(f)$ и любая окрестность множества*

$$\mathscr{R}_f := T(\mathrm{Fix}\,(f)) \subset \mathscr{R}_{\rm co}$$

*содержит точки из $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$.*

Отсюда следует, что в ряде частных случаев, например, когда $c_1 \equiv 0$, $c_2(x, y, z) = c_2(x)$, $U_2(y, z) = U_2(y)$, справедлива теорема плотности:

$$\mathscr{R}_{\rm co} = \overline{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\rm ext\,co}},$$

где черта означает замыкание в пространстве (8).

Автор выражает признательность А. А. Толстоногову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00247).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Walczak S.* Absolutely Continuous Functions of Several Variables and Their Application to Differential Equations // Bulletin of Polish Academy of Sciences. Math. 1987. V. 35, N 11-12. P. 733–744.
2. *Kisynski J.* Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour l'équation $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y, z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$ // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. 1960. V. XIV, N 6. P. 87–107.