

УДК 517.956.4

ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ $2n$ -ГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

© С. В. Попов, С. В. Потапова

madu@sitc.ru, sargyp@mail.ru

Якутский государственный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

В краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гёльдеровским пространствам. В случае уравнений с меняющимся направлением эволюции гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения таким пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x,t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удастся показать, что нецелый показатель $p - [p]$ пространства $H_{x,t}^{p,p/2n}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения уравнения:

$$\operatorname{sgn} x u_t = Lu, \quad (1)$$

где

$$Lu = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(k(x, t) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right) + c(x, t)u$$

$$k(x, t) \geq \delta > 0, \quad c(x, t) \leq 0.$$

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гёльдера $H_{x,t}^{p,p/2n}$, $p = 2nl + \gamma$, $0 < \gamma < 1$. удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x), \quad x < 0, \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0, t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0, t), \quad k = 0, \dots, 2n - 1, \quad (3)$$

где σ_k — действительные постоянные, $l \geq 1$ — целое число.

Большое число работ посвящено изучению таких уравнений при $n = 1$ (см. [1] и имеющую там библиографию).

Рассматриваются параболические уравнения $2n$ -го порядка ($n \geq 2$) с меняющимся направлением эволюции, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений [1–4], а также систем этих уравнений [5].

Общие условия сопряжения для параболических уравнений четвертого порядка были исследованы в работах [6, 7] и для них были найдены зависимости показателей гёльдеровских пространств от весовых функций склеивания. В частности, было замечено, что при $p - [p] \geq 1 - 4\theta(\sigma_k) > 0$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных начальных данных.

Центральным местом данной работы является явное представление условий $2nl$ -разрешимости

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 1, \dots, 2nl, \quad (4)$$

для краевых задач (1)–(3), когда n — произвольное натуральное число. Для доказательства $2nl$ -разрешимости при $n = 2$ и $n = 3$ необходимо рассмотрение общих условий склеивания, более того, находится зависимость показателей гильбертовских пространств от весовых функций склеивания, а при $n \geq 4$, оказалось, достаточно рассмотрения на линии раздела непрерывных условий склеивания, включая $(2n - 1)$ -ую производную (случай $\sigma_k = 1$).

Уравнения четвертого порядка. В области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассмотрим краевую задачу (1)–(3) при $n = 2$. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Б. Пини, краевая задача приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{B(t, \tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \vec{Q}(t). \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ($p = 4l + \gamma$), $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \left| \frac{a}{b} \right|$ ($a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3$, $b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1$). Тогда при выполнении $4l$ условий (4) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $\left(\theta < \frac{1}{4} \right)$:

- 1) $H_{x,t}^{p,p/4}$, если $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;
- 2) $H_{x,t}^{q,q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, если $1 - 4\theta < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x,t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/4}$, если $\gamma = 1 - 4\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{4}$, то, как показано в [8], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x,t}^{p,p/4}$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (4).

Уравнения шестого порядка. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига краевая задача (1)–(3) при $n = 3$ приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа (5).

Теорема 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ($p = 6l + \gamma$), $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \left| \frac{a}{b} \right|$ ($a = a(\sigma_k)$, $b = b(\sigma_k)$). Тогда при выполнении $6l$ условий (4) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $\left(\theta \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right) \right)$:

- 1) $H_{x,t}^{p,p/6}$, если $0 < \gamma < 2 - 6\theta$;
- 2) $H_{x,t}^{q,q/6}$, $q = 6l + 2 - 6\theta$, если $2 - 6\theta < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x,t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/6}$, если $\gamma = 2 - 6\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если выполнены условия теоремы при $\theta \leq \frac{1}{6}$, то единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x,t}^{p,p/6}$ при выполнении $6l$ условий (4). Если же выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{3}$, то, как показано в [8], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x,t}^{p,p/6}$ при выполнении $10l + 2$ условий вида (4).

Уравнения $2n$ -го порядка при $n \geq 4$. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига краевая задача (1)–(3) при непрерывных условиях склеивания ($\sigma_k = 1$) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа вида (5).

Теорема 3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ ($p = 2nl + \gamma$). Тогда при выполнении $2nl$ условий (4) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $H_{x,t}^{p,p/2n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
2. Гихов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
4. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. Веква Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968. 380 с.
6. Попов С. В. О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
7. Попов С. В. Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 1. С. 84–100.
8. Попов С. В. Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 93–112.