

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ФИНАЛЬНЫМ И ЧАСТИЧНЫМ ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

© С. Г. Пятков

pyatkov@uriit.ru

*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск*

Мы рассматриваем параболическое уравнение вида

$$Lv = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)l_0u + l_1u = 0 \quad (x \in Q = G \times (0, T)), \quad (1)$$

где

$$l_0u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) u_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} + a_0(x) u,$$

$$l_1u = \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + b_0(x) u$$

и G — ограниченная область с границей Γ или $G = \mathbb{R}^n$. Заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (2)$$

Если $G \neq \mathbb{R}^n$, то к начальному условию (2) добавляем также условие Дирихле

$$u|_S = 0, \quad S = \Gamma \times (0, T). \quad (3)$$

Если $G = \mathbb{R}^n$, то условие (3) понимается так: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Условие Дирихле может быть заменено на условие второй или третьей краевой задачи. Мы рассматриваем вопрос о определении вместе с решением и одного из коэффициентов уравнения, в частности, коэффициента $a(x)$ по некоторой дополнительной информации при $t = T$. Много интересных результатов в этом направлении получено в работах А. И. Прилепко и его учеников (см. [1]) Среди работ, где рассматривалась задача вида (1)–(3) с финальным переопределением решения на всей прямой $t = T$ (или на всем верхнем основании цилиндра в случае когда область цилиндрическая) отметим работу О. А. Колтуновского [2]. Можно также сослаться и на ряд результатов А. И. Кожанова, М. Иванцова, В. Исакова, М. Клибанова и ряда других авторов (см. [3–5]). Классические условия финального переопределения задаются в виде

$$u(T, x) = u_T(x), \quad x \in G, \quad (4)$$

Обратная задача о определении коэффициента $a(x)$ и решения u по данным (2)–(4) в случае $n = 1$ была исследована в [2]. Рассмотрим случай, когда коэффициент $a(x)$ известен в области $G \setminus G_0$ ($\overline{G_0} \subset G$) и неизвестен в области G_0 . Подобные задачи возникают в математической экономике [6]. В этом случае, естественно записать условие (4) в виде

$$u(T, x) = u_T(x), \quad x \in G_0. \quad (5)$$

Однако, оказалось, что подобная задача о определении решения u и коэффициента $a(x)$ по данным (2), (3), (5) переопределена, если мы ищем коэффициент $a(x)$ хотя бы непрерывным. Если искать коэффициент $a(x)$ непрерывным или из класса Гельдера $C^\alpha(\overline{G})$ с $\alpha \in [0, 1)$, то наиболее естественная постановка условий переопределения в этом случае имеет вид

$$L_1(a(x)l_0u_T) = L_1(a(x)l_0u(x, T)), \quad x \in G_0,$$

или

$$L_1(a(x)l_0u_T - l_1u_T) = L_1(al_0u(x, T) - l_1u(x, T)), \quad x \in G_0,$$

где L_1 — некоторый эллиптический оператор второго порядка. В этом случае задача корректна, в том смысле, что можно указывать естественные условия на данные задачи при выполнении которых решение существует и единственно (решение ищется в пространстве Соболева $W_p^{2,1}(Q)$ или Гельдера $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{Q})$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
2. *Колтуновский О. А.* О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с финальным условием переопределения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 45–72.
3. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equation of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series. V. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.
5. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
6. *Isakov V.* The inverse problem of option pricing // Recent Developments in Theory and Numerics. International Conference on Inverse problems. City Univercity of Hong Kong, 2002. P. 47–55.