

УДК 517.956.6

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ТИПА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

© А. Н. Рафиков

shaxtk@mail.ru

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

Пусть Ω конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная линией $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y) : (x^{2q}/q^2) + (y^{2p}/p^2) = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ с концами в точках $(h_1, 0)$, $(0, h_2)$, отрезком $\bar{I} = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq h_2\}$ и при $y < 0$ характеристиками $\frac{1}{q}x^q - \frac{1}{p}(-y)^p = 0$, $\frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}(-y)^p = 1$ уравнения

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0, \quad m, n = \operatorname{const} > 0, \quad (1)$$

где $2q = n + 2$, $2p = m + 2$, $h_1 = q^{1/q}$, $h_2 = p^{1/p}$, причем $m > n$. Введем обозначения: $2\alpha = n/(n + 2)$, $2\beta = m/(m + 2)$; $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$,

$$F_{0x} \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & x^{2q} \end{bmatrix} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^x f(t) (x^{2q} - t^{2q})^{c-1} F\left(a, b, c; \frac{x^{2q}-t^{2q}}{x^{2q}}\right) dt^{2q}, & c > 0, \\ \frac{d}{dx^{2q}} (x^{2q})^{-a} F_{0x} \begin{bmatrix} a, & b+1 \\ c+1, & x^{2q} \end{bmatrix} f(x), & -1 < c < 0, \end{cases}$$

$\theta_0(x_0)$ точка пересечения характеристики l уравнения (1) с характеристикой $\frac{1}{q}x^q + \frac{1}{p}(-y)^p = \frac{1}{q}x_0^q$ ($0 < x_0 < h_1$), т. е. точка с координатами $\left(\left(\frac{x_0^q}{2}\right)^q, \left(\frac{px_0^q}{2q}\right)^{1/p}\right)$, $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

ЗАДАЧА БС₁. Найти в области Ω функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ и $u_y(x, 0)$ при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow h_1$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $(1 - 2\beta) / (1 - 2\alpha)$;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω^- и Ω^+ ;
- 3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) - a(x, y) u\left(r_0^{1/q}x, r_0^{1/p}y\right) = g(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0; \quad (2)$$

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq h_2; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_{0x} \begin{bmatrix} (\alpha + \beta - 1)/2, & (\alpha + \beta - 2)/2 \\ \beta - 1, & x^{2q} \end{bmatrix} (x^{2q})^{\alpha-1/2} u[\theta_0(x)] \\ = e(x)u_y(x, 0) + b(x), \quad 0 < x < h_1, \end{aligned} \quad (4)$$

где r_0 — заданное число, а $a(x, y)$, $g(x, y)$, $\tau_2(y)$, $e(x)$, $b(x)$ — заданные функции, причем $0 < r_0 < 1$.

При $a(x, y) = 0$ из задачи БС₁ следует задача С, рассмотренная в работе [1].

Теорема 1. Если $|a(x, y)| \leq 1$, $(x, y) \in \bar{\sigma}_0$; $e_1(x) > 0$ или $e_1(x) \equiv 0$, $x \in [0, h_1]$ и $a(x, y) = y^\varepsilon a_0(x, y)$, $g(x, y) = y^\varepsilon g_0(x, y)$, $g_0(x, y)$, $a_0(x, y) \in C(\bar{\sigma}_0)$, $\varepsilon > 1 + m/2$; $\tau_2(y) =$

$y^{\varepsilon_1} \tau_0(y)$, $\varepsilon_1 > -\alpha + 1/2$, $\tau_0(y) \in C[0, h_2]$; $b(x), e(x) \in C^{(2, \mu)}[0, h_1]$, $\mu > 0$, тогда существует единственное решение задачи БС₁.

Единственность решения задачи БС₁ доказывается методом принципа экстремума, а существование решения — эквивалентным сведением задачи к системы интегральных уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения.

Аналогично можно исследовать следующее.

ЗАДАЧА БС₂. Найти в области Ω функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ и $u_y(x, 0)$ при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow h_1$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $(1 - 2\beta) / (1 - 2\alpha)$;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω^- и Ω^+ ;
- 3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) - a(x, y) u\left(r_0^{1/q} x, r_0^{1/p} y\right) = g(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0;$$

$$u_y(0, y) = \nu_2(y), \quad 0 < y < h_2;$$

$$F_{0x} \begin{bmatrix} (\alpha - \beta - 1)/2, & (\alpha - \beta)/2 \\ -\beta & x^{2q} \end{bmatrix} (x^{2q})^{\alpha + \beta - 1} u[\theta_0(x)]$$

$$= f(x) u_y(x, 0) + q(x), \quad 0 \leq x \leq h_1,$$

где r_0 — заданное число, а $a(x, y)$, $g(x, y)$, $\nu_2(y)$, $f(x)$, $q(x)$ — заданные функции, причем $0 < r_0 < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хасанов А. Об одной смешанной задаче для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Известия АН РУз, серия физ.-мат. наук. 1982. С. 28–32.