

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© Л. Х. Рахманова

LouisaR@yandex.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_y - u_{xx} + b^2 u = 0, & y > 0, \\ (-y)^m u_{yy} - u_{xx} - b^2 (-y)^m u = 0, & y < 0, \end{cases}$$

где $m > 0$, $b = \text{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α и β — заданные положительные действительные числа.

ЗАДАЧА. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_+ \cup \{y = \beta\});$$

$$Lu(x, y) \equiv 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in D_- \cup D_+ \cup \{y = \beta\};$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta;$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta;$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$.

Теорема. Если существует решение $u(x, y)$ задачи, то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N$

$$\lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) - \gamma_{-\frac{1}{2q}} J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) \neq 0,$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + (2\pi k)^2$, $p_k^2 q^2 = b^2 + (2\pi k)^2$, $q = (m + 2)/2$, $\gamma_{\frac{1}{2q}} = \left(\frac{p_k}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)$, $\gamma_{-\frac{1}{2q}} = \left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}} \Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)$, Γ — гамма-функция, $J_{\frac{1}{2q}}$ — функция Бесселя первого рода.

Доказательство данного утверждения проводится на основании работы [1].

Существование решения задачи выписывается в виде ряда Фурье и при некоторых ограничениях на функцию $\psi(x)$ показано, что сумма данного ряда удовлетворяет условиям постановки задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сабитов К. Б. Критерий однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтийские чтения - XVI". "Современные методы теории краевых задач". Воронеж. 2005. С. 139.