

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© О. А. Репин

matstat@mail.ru

Самарский государственный экономический университет, Самара

Рассматривается уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > -1, \quad m \neq 0, \quad (1)$$

которое является уравнением первого рода, если $m > 0$, и уравнением второго рода, если $-1 < m < 0$.

Пусть D — это область, ограниченная кривой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками уравнения (1) при $y > 0$; D_1 и D_2 — части области D , лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, J — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $\Theta_0(x)$ — аффикс точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$ с характеристикой, выходящей из точки $A(0, 0)$; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введенный в [1] (см. также [2, с. 326–327]) и имеющий при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}) f(t) dt, & (\alpha > 0), \\ (\frac{d}{dx})^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x), & (\alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1). \end{cases}$$

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную задачу.

ЗАДАЧА. Найти в области D решение уравнения (1) $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y) \forall (x, y) \in \Gamma,$$

$$A_1 I_{0+}^{a, b, b+2\beta-1} u[\theta_0(x)] + A_2 I_{0+}^{a+\beta, b, b+\beta-1} u(x, 0) = \psi(x) \forall x \in J,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, такие, что $\varphi(x, y) \in C(\Gamma)$, $\psi(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$; $\beta = \frac{m}{2m+4}$, если $m > 0$, $\beta = \frac{m}{2m-4}$, если $-1 < m < 0$; a, b, A_1 и A_2 — действительные числа, причем $|a| < \beta$, $1 - 2\beta < b < 2 - 2\beta$, $A_1, A_2 > 0$, если $m > 0$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$), $\beta - 1 < a < \beta$, $1 - 2\beta < b < 2 - 2\beta$, $A_1 < 0$, $A_1 \Gamma(1 - \beta) + 2A_2 \cos \pi \beta \Gamma(1 - 2\beta) > 0$, если $-1 < m < 0$ ($-\frac{1}{2} < \beta < 0$).

В работе доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saigo M. // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, N 2. P. 135–143.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.