Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 265–266

УДК 517.956

О РАЗРЫВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ В СЛУЧАЕ КОНТУРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© А. В. Роговой

rog2005@list.ru

Южно-Казахстанский гуманитарный институт, Шымкент, Казахстан

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ характеристиками $AC: x + y = 0$, $BC: x - y = 1$, а при $y > 0$ — кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y): \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y > 0 \right\},$$

рассмотрим однородную задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия "склеивания"решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \tag{3}$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \tag{4}$$

В работах [1, 2] для более общего уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$$

было показано существование разрывного решения задачи Трикоми в случае, если $m > 2$, а углы подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения достаточно велики.

Оказалось, что этот результат можно значительно усилить, и, помимо тривиального $u \equiv 0$, имеет место разрывное решение однородной задачи Трикоми даже для случая уравнения (1) (при $m = 0$) и малых углах подхода. Именно, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *В случае тех контуров σ_δ, для которых параметр δ может быть представлен в виде*

$$\delta = \frac{1}{2} ctg \left(\frac{4p - 1}{4n} \cdot \pi \right), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad p = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

существует ненулевое разрывное в точке $B(1, 0)$ решение (разрыв порядка n), однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе (задачи (1)–(2)), которое представляется по формуле

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{\cos\left(k \cdot arctg \frac{y}{1-x}\right) + \sin\left(k \cdot arctg \frac{y}{1-x}\right)}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^{\frac{k}{2}}} = \\ \qquad = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(1-x)^k + k(1-x)^{k-1} y - C_k^2 (1-x)^{k-2} y^2 - C_k^3 (1-x)^{k-3} y^3 + \ldots}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^{\frac{k}{2}}}, \ y > 0, \\ (-1)^n \left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n, \ y < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что, полагая $p=1$ в соотношении (5), мы можем получит существование разрывного решения задачи (1)–(2) в случае контуров, угол подхода которых к линии изменения типа уравнения очень мал и даже близок к 0.

Пример. Теорему 1 можно проиллюстрировать, полагая $n=1$ (в этом случае $p=1$) и $n=2$ ($p=1$ и $p=2$). При $n=1$ контур σ_δ запишется в виде

$$\sigma=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\quad y>0\right\},$$

а решение

$$u(x,y)=\begin{cases} 1-\frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2}=-\frac{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2+y^2}, & y>0,\\ -\frac{x+y}{1-x-y}=1-\frac{1}{1-x-y}, & y<0,\end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет уравнению (1), краевым условиям (2) и условиям согласования (3)–(4), что можно показать простой подстановкой.

При $n=2$ решение

$$u(x,y)=\begin{cases} 1-2\frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2}+\frac{(1-x)^2+2(1-x)y-y^2}{((1-x)^2+y^2)^2}, & y>0,\\ 1-2\frac{1}{1-x-y}+\frac{1}{(1-x-y)^2}, & y<0\end{cases}$$

удовлетворяет однородной задаче Трикоми (1)–(4) сразу для двух контуров

$$\sigma_1=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}$$

и

$$\sigma_2=\left\{(x,y):\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2,\quad y>0\right\}$$

Полученный результат о существовании разрывного решения задачи Трикоми может быть использован при изучении свойств соответствующего дифференциального оператора, прежде всего его спектральных свойств.

В заключении автор хотел бы выразить благодарность научному руководителю академику НАН РК Т. Ш. Кальменову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Роговой А. В.* О гладкости решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2002. № 5(33). С. 50–56.
2. *Роговой А. В.* Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина. Автореферат диссертации ... кандидата физико-математических наук. Шымкент, 2004. 26 с.