Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 268–269

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© М. Х. Рузиев

mruziev@mail.ru

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y - \lambda^2 y^m u = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в полуполосе $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, \ y > 0\}$, $O(0,0)$, $B(1,0)$, $OO_\infty(x = 0, y > 0)$, $BB_\infty(x = 1, y > 0)$.

Обозначим $\overline{D} = D \cup OO_\infty \cup \overline{OB} \cup BB_\infty$.

Задача D. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в D;

2) $\lim\limits_{y\to\infty} u(x, y) = 0$ равномерно по $x \in [0, 1]$; (2)

3)
$$u(0, y) = \varphi_1(y), \ \ 0 \leqslant y < \infty, \tag{3}$$

$$u(1, y) = \varphi_2(y), \ 0 \leqslant y < \infty, \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\tau(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \tau(0) = \tau(1) = 0.$$

Следует отметить, что задача Дирихле для уравнения (1) при $m = 0$, $\lambda = 0$ исследована в работе [1]. Задача с нелокальным краевым условием на боковых сторонах полуполосы для уравнения (1) в случае $m = 0$ изучена в работе [2].

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i(y) \in C[0, \infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i(y) \in L(0, \infty)$, $|\varphi_i(y)| < \frac{M}{y^\delta}$, $M = \text{const}$, $\delta > 0$, *при* $y \geq y_0$, $i = 1, 2$, $\tau(x) \in C[0, 1]$, $\tau'(x)$ *абсолютно интегрируема на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда решение задачи* D *существует и единственно.*

Доказательство. С помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений легко доказать единственность решения задачи D.

Согласно условиям теоремы 1, применив преобразования Ханкеля и метод Фурье, решение задачи D в области D представимо в явном виде

$$u(x, y) = k_2 y^{1-\beta_0} \int\limits_0^1 \tau(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{\beta-1} K_{1-\beta}(\lambda r) - r_1^{\beta-1} K_{1-\beta}(\lambda r_1) \right] dt$$

$$+ \frac{2}{m+2} y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \left\{ \int\limits_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} \varphi_1(t) dt \int\limits_0^\infty \frac{sh\left((1-x)\sqrt{\lambda^2 + s^2}\right)}{sh\left(\sqrt{\lambda^2 + s^2}\right)} \right.$$

$$\times s J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) ds$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}}\varphi_2(t)dt\int\limits_0^\infty \frac{sh\left(x\sqrt{\lambda^2+s^2}\right)}{sh\left(\sqrt{\lambda^2+s^2}\right)} s J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) ds\right\},$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода [3], $K_\nu(z)$ — функция Макдональда [3],

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x \mp t - 2n)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2}, \quad k_2 = \frac{(2\lambda)^{1-\beta}(m+2)^{2\beta-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\sqrt{\pi}}, \quad \beta = \frac{2\beta_0+m}{2(m+2)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шимкович Е. В.* // Литовский математический сборник. 1990. С. 185–195.
2. *Лернер М. Е., Репин О. А.* // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1974.