Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 270–271

УДК 517.956

АНАЛОГ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

© Ш. Н. Рузиев

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В работе приведены энергетические оценки специального вида, которые для уравнений чётного порядка получены в трудах многих авторов (О. А. Олейник, В. Кондратьев, Г. Иосифьян, А. Шишков и др).

В неограниченной области $G = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega \subset \{x : x_1 > 0\} \subset R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, рассмотрим уравнение

$$l[L(u)] + B(u) = f(x, t), \tag{1}$$

где $l[\vartheta] = l_0[\vartheta] + \alpha(x, t)\vartheta$, $l_0[\vartheta] = \alpha^k(x, t)\vartheta_{x_k}$;

$$L[u] = K(x, t)u_{tt} + a^{ij}(x, t)u_{x_i x_j} + a^i(x, t)u_{x_i} + a(x, t)u_t + c(x, t)u;$$

$B(u)$ — дифференциальный оператор 2-го порядка. Предполагается, что повторяющимся индексам ведётся суммирование от 1 до n.

Пусть $K(x, t) \geq 0$ в $\overline{G}$, $a^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geq d \mid \xi \mid^2$ в $\overline{G}$, $d = \text{const} > 0$.

Для простоты постановки задачи будем считать, что $K(x, t) = K(x, 0) = 0$ и положим $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$.

Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями

$$u \mid_\Gamma = 0; \quad l_0 u \mid_\omega = 0, \ \omega \subset \Gamma; \tag{2}$$

$$u(x, T) = \lambda u(x, 0), \ x \in \Omega, \ \lambda = \text{const} \neq 0. \tag{3}$$

Случай когда G — произвольная область в R^n; $L[u]$ — равномерно эллиптический оператор общего вида; $u = 0$ на ∂G; $l_0 u = 0$ на $\chi \subset \partial G$, исследован в работе [1].

В случае ограниченной области G эта задача рассматривалась в [2].

Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1)–(3) в G (см.[2]).

Положим $G(\tau) = G \cap \{x, t : 0 < x_1 < \tau\}$, $S(\tau) = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$.

Теорема. *Если $f(x, t) = 0$ в $G(\tau_2)$, то для любого τ_1, $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{G(\tau_1)} E(u)\, dxdt \leqslant \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int\limits_{G(\tau_2)} E(u)\, dxdt, \tag{4}$$

где $\int\limits_{\bullet} E(u)\, dxdt$ — интеграл энергии решения; $\Phi(x_1, \tau_2)$ является решением уравнения

$$\Phi'' = \mu(x_1)\Phi, \ \ \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2,$$

с условиями $\Phi(\tau_2, \tau_2) = 1$, $\Phi'(\tau_2, \tau_2) = 0$; $\mu(\tau)$ первое собственное значение однородной задачи Дирихле для некоторого эллиптического оператора на $S(\tau)$.

В некоторых случаях $\mu(\tau)$ можно найти в явном виде через геометрические характеристики области Ω (см.[1]). Оценка (4) получается подстановкой в интегральное тождество пробной функции $\vartheta = u(\psi - 1)\exp\{\frac{t}{T}\ln\lambda^{-2}\}$, где $\psi = (x_1 - \tau_1)\Phi'(\tau_1, \tau_2) + \Phi(\tau_1, \tau_2)$, если $0 \leq x_1 \leq \tau_1$; $\psi(x_1) = \Phi(x_1, \tau_2)$, если $\tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2$; $\psi(x_1) = 1$ если $\tau_2 \leq x_1$, и интегрированием по частям.

Замечание. При получении неравенства (4) мы сталкиваемся с проблемой оценки интегралов от функции вида $p(x, t)u_t u_{x_i}$ так, чтобы $E(u)$ было положительно. Это возможно, например, если $p(x, t)$ достаточно мало [3], либо $\alpha K > 0$ в $[T_+, T]$, $\quad T_+ = \text{const} > 0$, [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хашимов А. Р.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа // УзМЖ. 2001. № 5, 6. С. 63–72.
2. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1990. 140 с.
3. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л., 1990. 204 с.
4. *Каратопраклиева М. Г.* Регулярное решение одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 5. С. 847–857.