

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© К. Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова

Sabitov_fmfm@mail.ru, albina1210@mail.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + au_y - b^2u = 0, \quad (1)$$

где $a, b = \text{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные числа.

Как известно [1], что постановка краевых задач для уравнения (1) в области эллиптичности существенным образом зависит от коэффициента a . В связи с этим рассмотрены следующие задачи.

ЗАДАЧА 1. Пусть $0 < a < 1$. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (3)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (5)$$

$$u(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^a u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^a u_y(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где f и g — заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$.

ЗАДАЧА 2. Пусть $a \geq 1$. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (3)–(5) и

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-). \quad (8)$$

ЗАДАЧА 3. Пусть $a > 1$. Найти в области D функцию $u(x, y)$ неограниченную при $y \rightarrow 0$, удовлетворяющую условиям (3), (4), (6), (7) и

$$u(x, y) \in C(\overline{D} \setminus \{y = 0\}). \quad (9)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{a-1} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{a-1} u(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (10)$$

ЗАДАЧА 4. Пусть $a = 1$. Найти в области D функцию $u(x, y)$ неограниченную при $y \rightarrow 0$, удовлетворяющую условиям (3), (4), (6), (9) и

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} (\ln y)^{-1} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (\ln(-y))^{-1} u(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (11)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{\frac{1}{2}} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{\frac{1}{2}} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1. \quad (12)$$

В работе при $0 < a < 1$ установлены критерий единственности и существование решения задачи 1.

Теорема 1. Если существует решение $u(x, y)$ задачи (2)–(7), то оно единственно только тогда, когда $\Delta_k(\alpha, \beta) = J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) + \frac{\pi}{2} \bar{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) \neq 0$ при всех $k \in N$, где $\bar{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sin \pi a} (J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) + J_{-(1-a)}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}))$, $p_k = 2\sqrt{b^2 + (\pi k)^2}$, $I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})$ и $K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, $J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})$ и $J_{a-1}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})$ функции Бесселя первого рода.

Выражение $\Delta_k(\alpha, \beta)$ представим в следующем виде: $\Delta_k(\alpha, \beta) = I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})\delta_k(\alpha, \beta)$, где $\delta_k(\alpha, \beta) = \frac{K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})}{I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})} + \frac{\pi}{2} \bar{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})$.

Лемма 1. Существуют α и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при всех $\beta > 0$ и больших k справедлива оценка

$$\inf_k |\sqrt{k}\delta_k(\alpha, \beta)| \geq C_0 > 0. \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in C^3[0, 1]$, $g(x) \in C^{4+\gamma}[0, 1]$, где $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ и выполняются условия $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$, $g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = 0$. Тогда задача (2)–(7) однозначно разрешима, если выполнены условия $\Delta_k(\alpha, \beta) \neq 0$ и (13). Это решение определяется рядом $u(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y) \sin \pi k x$, где u_k определяются по формуле

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{f_k(\alpha y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(\alpha, y) + g_k(\beta y)^{\frac{1-a}{2}} A_k(y, \beta)}{\Delta_k(\alpha, \beta)(\alpha \beta)^{\frac{1-a}{2}}}, & y > 0, \\ \frac{\frac{\pi}{2} f_k(-\alpha y)^{\frac{1-a}{2}} B_k(\alpha, -y) + g_k(-\beta y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(-y, \beta)}{\Delta_k(\alpha, \beta)(\alpha \beta)^{\frac{1-a}{2}}}, & y < 0, \end{cases}$$

$$\Delta_k(\alpha, y) = J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) + \frac{\pi}{2} \bar{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})I_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}),$$

$$A_k(y, \beta) = I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) - I_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$B_k(\alpha, -y) = \bar{Y}_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}})J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) - \bar{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})J_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}),$$

$$\Delta_k(-y, \beta) = J_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) + \frac{\pi}{2} \bar{Y}_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}})I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$f_k = \int_0^1 f(x) \sin \pi k x dx, \quad g_k = \int_0^1 g(x) \sin \pi k x dx.$$

Доказательство проводится на основании работы [2].

В случае $a \geq 1$ решения $u(x, y)$ уравнения (1), вообще говоря, при $y \rightarrow 0$ обращается в бесконечность. Показано, что задача 1 в классах функций (8) и (9) переопределена, то есть для выделения единственного решения достаточно задать лишь одно граничное условие на верхнем (5) или нижнем (6) основании прямоугольника D . В связи с этим доказана корректность постановки задач 2–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кельдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–184.
2. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 1.