Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 274–275

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© Ю. К. Сабитова

ori05@mail.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2 K(y)u = 0\,, \tag{1}$$

где $K(y) = \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m, m = \mathrm{const} > 0$, $b = \mathrm{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \{x=0\} \cup \{x=1\}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \;\; u(x,-\alpha) = \psi(x), \;\; 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной заметке, следуя [1, 2], установлены критерий единственности и существование решения задачи (2)—(5).

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (2)–(5), то оно единственно только тогда, когда $\forall n \in N$:*

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q) + \frac{\pi}{2} I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q) \neq 0, \tag{6}$$

где $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) = (J_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_n y^q))/\sin\frac{\pi}{2q}, J_{\frac{1}{2q}}(x), J_{-\frac{1}{2q}}(x), I_{\frac{1}{2q}}(x), K_{\frac{1}{2q}}(x)$ — соответственно функции Бесселя I рода, модифицированные функции Бесселя I и III рода порядка $1/2q$, $p_n = \sqrt{b^2 + (2\pi n)^2}/q, q = (m+2)/2.$

Пусть при некоторых α , β и $n = k \in N$: $\Delta_k(\alpha,\beta) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения

$$u_k(x,y) = \begin{cases} \Delta_k(\alpha,y)\sqrt{y}(4\lambda_1(1-x)\cos(2\pi kx) + 2\lambda_2(1-x) + 4\lambda_3\sin(2\pi kx)), & y > 0, \\ \Delta_k(-y,\beta)\sqrt{-y}(4\lambda_1(1-x)\cos(2\pi kx) + 2\lambda_2(1-x) + 4\lambda_3\sin(2\pi kx)), & y < 0, \end{cases}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественные постоянные.

Выражение $\Delta_n(\alpha,\beta)$ представим в следующем виде: $\Delta_n(\alpha,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\delta_n(\alpha,\beta)$, где $\delta_n(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)/I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)$.

Лемма. *Существуют α и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при всех $\beta > 0$ и больших n справедлива оценка*

$$\inf_n |\sqrt{n}\delta_n(\alpha,\beta)| \geq C_0 > 0. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x) \in C^{3+\alpha}[0,1], 0 < \alpha < 1$, $\varphi'(0) = \varphi'(1), \psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(1), \psi''(0) = \psi''(1)$, *выполнены условия* (6) *и* (7), *то существует решение задачи* (2)–(5) *и оно представимо в виде суммы ряда*

$$u(x,y) = 2(1-x)u_0(y) + 4\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)(1-x)\cos(2\pi nx) + 4\sum_{n=1}^{\infty} v_n(y)\sin(2\pi nx),$$

где функции $u_0(y), u_n(y), v_n(y)$ *определены соответственно по формулам*

$$u_0(y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_0\sqrt{\alpha y}\Delta_0(\alpha,y) + \psi_0\sqrt{\beta y}A_0(y,\beta)}{\Delta_0(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y > 0, \\ \dfrac{\varphi_0\sqrt{-\alpha y}B_0(\alpha,-y) + \psi_0\sqrt{-\beta y}\Delta_0(-y,\beta)}{\Delta_0(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y < 0 \end{cases}$$

$$u_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha y}[\varphi_{1n} - w_n^+(\beta)]\Delta_n(\alpha,y) + \sqrt{\beta y}[\psi_{1n} - w_n^-(\alpha)]A_n(y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}} + w_n^+(y), \\ \dfrac{\sqrt{-\beta y}[\varphi_{1n} - w_n^-(\alpha)]\Delta_n(-y,\beta) + \sqrt{-\alpha y}[\psi_{1n} - w_n^+(\beta)]B_n(\alpha,-y)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}} + w_n^-(-y), \end{cases}$$

$$v_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_n\sqrt{\alpha y}\Delta_n(\alpha,y) + \psi_n\sqrt{\beta y}A_n(y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y > 0, \\ \dfrac{\varphi_n\sqrt{-\alpha y}B_n(\alpha,-y) + \psi_n\sqrt{-\beta y}\Delta_n(-y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y < 0, \end{cases}$$

где

$$\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x)\cos(2\pi nx)dx, \psi_n = \int_0^1 \psi(x)\cos(2\pi nx)dx, \varphi_{1n} = \int_0^1 x\varphi(x)\sin(2\pi nx)dx,$$

$$\psi_{1n} = \int_0^1 x\psi(x)\sin(2\pi nx)dx, \varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)dx, \psi_0 = \int_0^1 \psi(x)dx,$$

$$A_n(y,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q) - I_{\frac{1}{2q}}(p_n y^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q),$$

$$B_n(\alpha,-y) = \frac{\pi}{2}(\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q) - \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q),$$

функции $w_n^+(y), w_n^-(-y)$ *выражаются через отмеченные выше функции Бесселя.*

Отметим, что построенное решение $u(x,y)$ задачи (2)–(5) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и функция $u(x,y)$ всюду в D является решением уравнения (1). Линия изменения типа $y = 0$ уравнения (1) как особая линия устраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.
2. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. АН. Т. 413. № 1.