

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© М. А. Садыбеков, А. М. Сарсемби

makmud-s@mail.kz, abzhahan@ok.kz

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Центральное место в спектральной теории дифференциальных операторов занимает вопрос о разложении функций в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов. Если система собственных функций самосопряженного оператора с точечным спектром всегда образует ортонормированный базис, то система собственных функций несамопряженного оператора может оказаться даже неполной. Тогда приходится их дополнять так называемыми присоединенными функциями. При этом, если u_{k0} — собственная функция, а u_{ki} — соответствующая ей присоединенная функция порядка $i \geq 1$, то присоединенные функции можно выбирать равными $u_{ki} + c_k u_{k0}$.

Обычно, вектор $u_0 \neq 0$ называют собственным вектором оператора A , соответствующим собственному значению λ_0 , если $(A - \lambda_0 E)u_0 = 0$, и вектор u_m называют присоединенным вектором порядка $m \geq 1$, соответствующим тому же λ_0 , если $(A - \lambda_0 E)^{m+1}u_m = 0$, $(A - \lambda_0 E)^m u_m \neq 0$. Объединение всех собственных и присоединенных векторов принято называть корневыми векторами оператора A .

Согласно теории присоединенных функций, построенной М. В. Келдышем [1] для обыкновенного дифференциального оператора L порядка n , в случае когда коэффициенты оператора L не зависят от спектрального параметра λ , собственные и присоединенные функции можно определить следующим образом

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0, Lu_1 = \lambda_0 u_1 + u_0, \dots, Lu_s = \lambda_0 u_s + u_{s-1}. \quad (1)$$

При рассмотрении ряда задач применение этих формул может быть малоэффективным. Так, между соответствующими представлениями операторов L, L^2 или L, L^{-1} отсутствуют простые соотношения.

Кроме того оказывается, что построенная этим способом система собственных и присоединенных функций, в случае когда общее число присоединенных функций бесконечно, может быть базисом при одном выборе присоединенных функций и перестает быть базисом при другом выборе таковых (присоединенные функции могут быть определены с точностью до слагаемого, содержащего предыдущие присоединенные функции) (см., например, [2, 3]). Это обстоятельство побудило В. А. Ильина [2] ввести понятие приведенной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности всякий раз, если только существует хотя бы один выбор присоединенных функций, обеспечивающий базисность всей системы корневых функций. В этой связи в математической литературе встречается термин "при специальном выборе присоединенных функций" [4, 5].

Эти факты говорят о том, что все еще не удается в достаточно широкой степени построить аналог жордановой канонической формы и теории элементарных делителей линейных операторов в конечномерном пространстве. Наличие такой проблемы отмечено также в [6, стр. 470].

В данной работе предлагаются новые формулы построения присоединенных функций дифференциального оператора L (с вполне непрерывным обратным оператором L^{-1}):

$$Lu_{k0} = \lambda_0 u_{k0}, \quad Lu_{ki} = \lambda_k (u_{ki} + \alpha_k u_{ki-1}). \quad (2)$$

При $\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k}$ эти формулы совпадают с (1). Другие способы построения присоединенных функций обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков встречаются в работах И. С. Ломова [7], В. Д. Будаева [8] и др. Но в этих работах выбор коэффициента α_k тем или иным образом зависит от порядка оператора. Если в (2) положить $\alpha_k = 1$, то можно избежать зависимости от порядка дифференциального оператора. Поэтому будем считать, что присоединенные функции построены по формуле

$$Lu_{k0} = \lambda_0 u_{k0}, \quad Lu_{ki} = \lambda_k(u_{ki} + u_{ki-1}). \quad (3)$$

Для произвольной системы функций u_{k0}, u_{k1} из класса L^2 , несвязанной, вообще говоря, с дифференциальным оператором, справедлива следующая

Теорема. Пусть система u_{k0}, u_{k1} образует безусловный базис в L^2 . Тогда для безусловной базисности в L^2 системы $u_{k0}, u_{k1} + u_{k0}$ необходимо и достаточно выполнение равномерной оценки

$$\|u_{k0}\|_{L_2} \leq c_0 \|u_{k1}\|_{L_2}, \quad (4)$$

где c, c_0 — произвольные постоянные.

Оценки (4), названные В. А. Ильиным антиаприорными оценками, всегда будут выполнены для оператора

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x),$$

заданного на конечном интервале G , если присоединенные функции построены по формуле (3) и $q(x) \in L_1(G)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
2. Ильин В. А. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
4. Ильин В. А. // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 9. С. 1516–1529.
5. Кангуужин Б. Е. Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Алматы, 2005. 46 с.
6. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979. 587 с.
7. Ломов И. С. О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 3. С. 328–342.
8. Будаев В. Д. Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. М., 1993. 242 с.