Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 288–289

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© Р. Р. Сафиуллова

Regina-SAF@yandex.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Постановка задач. Пусть $\Omega \subseteq R^n$, $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 < t \leq T\}$, $S = \Gamma \times (0,T)$. Пусть $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h_j(x,t)$, $j = 0,1,\ldots,m$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $u_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, $K(t)$, $v_1(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$.

$$H_0 = \{v(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), v_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in H_0, v_t(x,t) \in H_0\}.$$

Задача 1. Найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$,..., $q_m(x)$, удовлетворяющие в Q уравнению

$$u_{tt} - \Delta u + b(x,t)u_t + a(x,t)u = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t)q_k(x) + h_0(x,t) \qquad (1)$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u(x,t)|_S = 0, \qquad (2)$$

$$u(x,t_k) = u_k(x), \qquad k = 1,\ldots,m, \qquad x \in \overline{\Omega}. \qquad (3)$$

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$, удовлетворяющие в Q уравнению (1) при $m = 1$, такие, что справедливы условия (2), а также интегральное условие

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = v_1(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \qquad (4)$$

Разрешимость задач. Рассмотрим линейную алгебраическую относительно функций $a_1(x)$, ..., $a_m(x)$ систему

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x)h_i(x,t_k) = v_{tt}(x,t_k) + b(x,t_k)v_t(x,t_k) + a(x,t_k)u_k(x) - \Delta u_k(x) - h_0(x,t_k), \quad k = \overline{1,m}.$$

Предполагая, что определитель системы $d_0(x) \neq 0$ на $\overline{\Omega}$, найдем функции $a_k(x)$:

$$a_k(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}(x)v_{tt}(x,t_i) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ki}(x)v_t(x,t_i) + \mu_k(x), \quad k = 1,\ldots,m,$$

функции $\beta_{ki}(x)$, $\gamma_{ki}(x)$, $\mu_k(x)$ вполне конкретно вычисляются через функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h_0(x,t)$, $h_k(x,t)$, $u_k(x)$, $k = 1,\ldots,m.$ Положим также

$$s_i(x,t) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t)\beta_{ki}(x), \quad p_i(x,t) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t)\gamma_{ki}(x),$$

$$g(x,t)=\sum_{k=1}^{m}h_{kt}(x,t)\mu_k(x)+h_{0t}(x,t),\quad \alpha(x,t)=\frac{h_1(x,t)}{\int\limits_0^T K(t)h_1(x,t)dt}.$$

Теорема 1. *Пусть*

1) $a(x,t),b(x,t)\in C^2(\overline{Q})$, $h_k(x,t)\in W^1_\infty(Q)\cap W^2_2(Q)$, $h_{kt}(x,t)\in W^1_\infty(Q)$, $h_{ktt}(x,t)\in L_2(Q)$, $h_k(x,t_i)\in W^1_\infty(\Omega)$, $k=0,1,\dots,m$, $i=1,\dots,m$, $\varphi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\psi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $u_k(x)\in W^3_2(\Omega)\cap W^2_\infty(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $g(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, $k=1,\dots,m$,

2) $d_0(x)\ge\overline{d_0}>0$, $a(x,t)\ge 0$, $b(x,t)\ge b_0>0$, $b_t(x,t)+a(x,t)>0$, $(x,t)\in\overline{Q}$;

3) $\exists\delta_0>0,\delta_1>0$ *такие, что выполняются следующие условия*

$$\overline{b_0}=b_0-(m+1)\delta_1^2-\frac{\delta_0^2}{2}-\frac{1}{2}\max_{\overline{Q}}\left[(b_t(x,t)+a(x,t))_t\right]-\frac{T^2}{2\delta_0^2}\max_{\overline{Q}}a_t^2(x,t)>0;$$

$$\frac{1}{2}-\frac{m(2m+1)}{2}vrai\max_{\overline{\Omega}}\left[s_i^2(x,0)\right]-\frac{Tm(m+1)}{2\delta_1^2}vrai\max_{\overline{Q}}\left[s_{it}^2(x,t)\right]>0;$$

$$\frac{1}{2}\min_{\overline{Q}}\left[b_t(x,t)+a(x,t)\right]-\frac{m(2m+1)}{2}vrai\max_{\overline{\Omega}}\left[p_i^2(x,0)\right]-\frac{Tm^2}{2\delta_1^2}vrai\max_{\overline{Q}}\left[p_{it}^2(x,t)\right]>0.$$

Тогда обратная задача (1)–(3) имеет решение $\{u(x,t),q_1(x),\dots,q_m(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V_0$, $q_k(x)\in W^1_2(\Omega)$, $k=1,\dots,m.$

Теорема 2. *Пусть*

1) $a(x,t),b(x,t)\in C^1(\overline{Q})$, $K(t)\in C^1[0,T]$, $h_1(x,t)\in L_\infty(Q)$, $h_{1t}(x,t)\in L_\infty(Q)$, $h_0(x,t)\in L_2(Q)$, $h_{0t}(x,t)\in L_2(Q)$, $v_1(x)\in W^2_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\varphi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\psi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

2) $a(x,t)\ge 0,b(x,t)\ge b_0>0,a_t(x,t)\le 0,(x,t)\in\overline{Q}$;

3) $\exists\delta_0>0,\delta_1>0,\delta_2>0,\delta_3>0$ *такие, что* $1-\delta_1^2K^2(T)>0$;

$$b_0>\frac{\delta_0^2}{2}+\left[\frac{1}{2\delta_1^2}+\frac{1}{2\delta_2^2}+\frac{1}{2\delta_3^2}\right]\max_{\overline{Q}}\alpha^2(x,t)+\frac{\delta_2^2}{2}\max_{\overline{Q}}(bK-K_t)^2+\delta_3^2T^2\max_{\overline{Q}}(aK)^2.$$

4) $\left|\int\limits_0^T K(t)h_1(x,t)dt\right|\ge k_0>0,\quad x\in\overline{\Omega}.$

Тогда обратная задача (1), (2), (4) *имеет решение* $\{u(x,t),q_1(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V_0$, $q_1(x)\in L_2(\Omega)$.

Идея доказательств обеих теорем состоит в следующем. Рассматриваемые обратные задачи сводятся к прямым нелокальным краевым задачам для “нагруженных” уравнений составного типа [1, 2]. При решении полученных задач используются методы продолжения по параметру, регуляризации и метод априорных оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP, Utrecht, 1999.
2. *Сафиуллова Р. Р.* Нелокальные задачи для одного класса уравнений составного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 2. С. 57–72.