Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 278–279

УДК 517.946

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И H-ТЕОРЕМА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ВО 2-М ПРИБЛИЖЕНИИ

© А. Сакабеков *, Е. Аужани

* a.sakabekov@kbtu.kz

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

В работе доказано выполнение аналогов закона сохранения массы и H-теоремы Больцмана в случае одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана во 2-ом приближении.

Рассмотрим систему моментных уравнений Больцмана во 2-ом приближении [1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varphi_{00}-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_{10}+\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_{02}\Big)=0,\\
&\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\varphi_{02}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_{01}\Big)=I_{02}+\lambda_{02}\varphi_{02},\\
&\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_{01}\Big)=0,\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где α,λ_{02} — const, $I_{02}=\frac{\sigma_2-\sigma_0}{2}(\varphi_{00}\varphi_{02}-\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{01}^2)$, σ_2,σ_0 — const.

С помощью ортогонального преобразования систему уравнений (1) можно записать в виде

$$
\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{3}\Psi_3\\ -\sqrt{3}\Psi_4\end{pmatrix}=\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{10}(DT\Psi,T\Psi)\\ -2(DT\Psi,T\Psi)\\ -2(DT\Psi,T\Psi)\end{pmatrix},\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R},\tag{2}
$$

где

$$
(DT\Psi,T\Psi)=\left[\sqrt{\frac{2}{5}}\Psi_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\Psi_2+\Psi_3+\Psi_4\right)\right]\left[\frac{\sqrt{5}}{3}\Psi_2-\frac{\sqrt{2}}{3}(\Psi_3+\Psi_4)\right]-\frac{(\Psi_4-\Psi_3)^2}{2\sqrt{3}}.
$$

Для системы уравнений (2) зададим и начальные условия

$$
\Psi_i(0,x)=\Psi_i^0(x),\qquad x\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,4}.\tag{3}
$$

Нетрудно доказать, что если начальные функции $\Psi_i^0(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,4}$, то решение задачи (2)–(3) также положительны.

Теорема. *Для системы уравнений (2) имеет место следующий закон сохранения массы и H-теорема Больцмана*

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1+4\Psi_2+\sqrt{10}\Psi_3+\sqrt{10}\Psi_4)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\sqrt{3}(\Psi_3-\Psi_4)\Big)=0,\tag{4}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1\ln\Psi_1+4\Psi_2\ln\Psi_2+\sqrt{10}\Psi_3\ln\Psi_3+\sqrt{10}\Psi_4\ln\Psi_4)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{30}(\Psi_3\ln\Psi_3-\Psi_4\ln\Psi_4)\le 0.\tag{5}
$$

Из (4) и (5) получим следующие оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1 + 4\Psi_2 + \sqrt{10}\Psi_3 + \sqrt{10}\Psi_4)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1^0 + 4\Psi_2^0 + \sqrt{10}\Psi_3^0 + \sqrt{10}\Psi_4^0)dx, \qquad \forall t,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1 \ln\Psi_1 + 4\Psi_2 \ln\Psi_2 + \sqrt{10}\Psi_3 \ln\Psi_3 + \sqrt{10}\Psi_4 \ln\Psi_4)dx \leq$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1^0 \ln\Psi_1^0 + 4\Psi_2^0 \ln\Psi_2^0 + \sqrt{10}\Psi_3^0 \ln\Psi_3^0 + \sqrt{10}\Psi_4^0 \ln\Psi_4^0)dx, \qquad \forall t.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сакабеков А.* Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана. Алматы: Fылым, 2002. 276 с.