*Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 280–281*

*УДК 517.9*

# О ДВУХ МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

**© В. Ж. Сакбаев**

fumi2003@mail.ru

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный*

Цель проводимого исследования — сравнить результаты применения методов эллиптической регуляризации и методов минимизации функционалов невязки задачи Коши для уравнения Шредингера с вырожденным производящим оператором:

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}u(t),\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0,\ u_0 \in H, \tag{2}$$

где $H$ есть гильбертово пространство $L_2(R)$, а $\mathbf{L}$ есть линейный симметричный оператор в пространстве $H$, заданный дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}u(x) = \frac{d}{dx}(g(x)\frac{d}{dx}u(x)) + \frac{i}{2}[a(x)\frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}(a(x)u(x))] \tag{3}$$

на максимальной области определения $D(\mathbf{L})$ — линейном многообразии всех функций из $H$, для которых дифференциальное выражение (3) определено как элемент пространства $H$. Здесь рассматривается модельная задача с вырождением на полупрямой: пусть $g(x) = \theta(-x)$ и $a(x) = b\theta(x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, а $b \in R$ — параметр задачи.

Корректность задачи Коши (1), (2) зависит от знака параметра $b$: если $b \le 0$, то оператор $-i\mathbf{L}$ является генератором изометрической полугруппы $\mathbf{U_L}(t) = e^{-it\mathbf{L}},\ t > 0,$ в пространстве $H$, а задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение $u(t) = \mathbf{U_L}(t)u_0,\ t \in (0,T)$ при любом $u_0 \in H$, которое является сильным решением при $u_0 \in D(\mathbf{L})$. Если же $b > 0$, то оператор $-i\mathbf{L}^*$ генерирует в пространстве $H$ сжимающую полугруппу $\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t) = e^{-it\mathbf{L}^*} = (\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t))^*,\ t > 0.$ В этом случае пространство $H$ разлагается в прямую сумму подпространств $H_0 = \overline{\mathrm{Im}(\mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(T))}$ и $H_1 = \mathrm{Ker}(\mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(T))$, а задача (1), (2) имеет обобщенное решение тогда и только тогда, когда $u_0 \in H_0$, причем это решение есть $u(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$ (см. [1]).

Как для изучения устойчивости решения задачи Коши (1), (2), так и с целью определить обобщенное аппроксимативное ее решение в случае нарушения условий корректности, исследуется эллиптическая регуляризация указанной задачи — последовательность задач Коши с начальным условием (2) для уравнений вида (1) с производящим оператором $\mathbf{L}_n,\ n \in \mathbf{N}$. Здесь при каждом $n \in \mathbf{N}$ оператор $\mathbf{L}_n$ определен дифференциальным выражением (3), в котором роль функции $g(x)$ играет функция $g_n(x) = g(x) + \varepsilon_n$ (а $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая бесконечно малая последовательность положительных чисел.) Тогда $\mathbf{L}_n$ — самосопряженный оператор, генерирующий унитарную группу $\mathbf{U}_n(t) = e^{-it\mathbf{L}_n},\ t \in R,$ а $\{u_n(t) = \mathbf{U}_n(t)u_0,\ t \in (0,T),\}$ — *последовательность решений регуляризованных задач.*

**Теорема 1.** *Последовательность решений регуляризованных задач сходится в пространстве $C((0,T),H)$ тогда и только тогда, когда задача (1), (2) имеет единственное решение. В противном случае указанная последовательность сходится в слабой топологии пространства $H$ равномерно на промежутке $(0,T)$ к функции $u^*(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)u_0$.*

Для применения к задаче (1), (2) метода квазирешений (минимизации функционала невязки, см. [2]) представим задачу Коши как уравнение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2((0,T),H)$ в дифференциальной (A) или в интегральной (B) форме.

Дифференциальная форма задачи Коши (1), (2):

$$\mathbf{A}u - \varphi = 0$$

где $\varphi(t) = i\mathbf{L}u_0,\, t \in (0,T)$, линейный оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $\mathcal{H}$ задан на плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии $D(\mathbf{A}) = \{u(t) \in C((0,T), D(\mathbf{L})) \bigcap C^1((0,T), H)) : \ u(+0) = 0\}$ формулой $\mathbf{A}u(t) = \frac{d}{dt}u(t) + i\mathbf{L}u(t)$. Область определения его сопряженного включает в себя плотное в $\mathcal{H}$ линейное многообразие $D(\mathbf{A}^*_C) = \{u(t) \in C^1((0,T), H) \bigcap C((0,T), D(\mathbf{L}^*)) : \ u(T) = 0\}$.

Интегральная форма задачи Коши (1), (2):

$$\mathbf{B}u - \psi = 0$$

где $\psi(t) = u_0,\, t \in (0,T)$, линейный оператор $\mathbf{B}$ в пространстве $\mathcal{H}$ задан на плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии $D(B) = C((0,T), D(\mathbf{L}))$ формулой $\mathbf{B}u(t) = u(t) + i\int\limits_0^t \mathbf{L}u(s)ds$. Оператор $\mathbf{B}$ замыкаем, так как его сопряженный определен на плотном в $\mathcal{H}$ линеале $D(\mathbf{B}^*_C) = C((0,T), D(\mathbf{L}^*))$.

Замыкание операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначим через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Функционалы невязки задачи Коши (1), (2) определим как

$$J_A(u) = \|\mathbf{A}u - \varphi\|_{\mathcal{H}},\, u \in D(\mathbf{A}); \qquad J_B(u) = \|\mathbf{B}u - \psi\|_{\mathcal{H}},\, u \in D(\mathbf{B}).$$

Заметим, что семейство ортогональных проекторов $\mathbf{P}(t) = \mathbf{I} - \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t)\mathbf{U}^*_{-\mathbf{L}}(t),\, t \in (0,T)$ образует ортогональное разложение единичного оператора в подпространстве $H_1(T)$.

**Теорема 2**. *Пусть* $u_0 \in H_1(T)$. *Тогда функционал* $J_A$ *имеет точную нижнюю грань* $\alpha = \|f\|_{\mathcal{H}}$, *где* $f(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)\int\limits_0^T \frac{1}{s}d\mathbf{P}(s)u_0$. *Функция* $u_A(t) = \int\limits_t^T \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(s-t)f(s)ds$, *к которомой сходится в пространстве* $\mathcal{H}$ *любая минимизирующая последовательность, является единственной точкой строгого минимума функционал* $J_A$.

*Пусть* $u_0 \in H_1(T)$. *Тогда функционал* $J_B$ *имеет точную нижнюю грань* $\beta = \|F\|_{\mathcal{H}}$, *где* $F(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)\int\limits_0^T \frac{1}{s}d\mathbf{P}(s)\int\limits_0^s \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(\tau)u_0 d\tau$. *Если функционал* $J_B$ *достигает минимума на элементе* $u_B$, *то* $u_B$ *есть точка строгого минимума и удовлетворяет уравнению* $u_B(t) + i\int\limits_0^t \mathbf{L}u_B(s)ds = u_0 - F(t)$.

Замечание. Итак, задача Коши (1), (2) имеет единственное слабое аппроксимативное решение, не зависященн от выбора регуляризации задачи. Точки минимума функционалов невязки по норме задачи Коши (1), (2) в интегральной и в дифференциальной формах различны, причем значение экстремали функционала в каждой точке промежутка $(0,T)$ зависит от величины $T$. Аппроксимативное решение $u^*(t)$ доставляет минимум не функционалу невязки нормы, но семейству функционалов невязки полунорм топологии слабой сходимости в пространстве $H$:

$$j_v(u) = \int\limits_0^T |(v, u(t) - u_0)_H + (\mathbf{L}^*v, i\int\limits_0^t u(s)ds)_H|^2 dt,\ v \in D(\mathbf{L}^*),$$

где $D(j_v) = \mathcal{H}$ для любого $v \in D(\mathbf{L}^*)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Сакбаев В. Ж.* О функционалах на решениях задачи Коши для уравнения Шредингера с вырождением на полупрямой // ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1654–1673.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.