

УДК 517.95

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© М. С. Салахитдинов

mathinst@uzsci.net

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

Известно, что в последнее время интенсивно исследуются спектральные задачи для уравнений смешанного типа. В большинстве работ, посвященных изучению этих вопросов, спектральный параметр участвует в рассматриваемом уравнении. Однако, как отмечено в [1], спектральные задачи, спектральный параметр которых участвует, как и в уравнении, так и в краевых условиях, также имеет немаловажный интерес. Такие задачи появляются при изучении вопросов прикладного характера, например, вопросов математической биологии и порождаются нелокальными краевыми условиями, которые охватывают различные локальные условия.

Исходя из этих соображений, ранее (например, в [2]) нами были предложены и исследованы некоторые спектральные нелокальные задачи для уравнения смешанного типа

$$\operatorname{sign} x u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} + \frac{2\beta}{|x|} u_x + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \lambda u = 0, \quad (1)$$

краевые условия, которые содержат спектральный параметр λ . В частности, при $0 < \beta < 1/2$ были найдены собственные числа и собственные функции следующей задачи для уравнения (1) в области $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup OB$, где

$$\Omega_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}, \quad \Omega_1 = \{(x, y) : -y < x < y + 1, x > 0, y < 0\},$$

$$OB = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}.$$

ЗАДАЧА $A_{\lambda}^1(\beta < 1/2)$. Найти те значения параметра λ , при которых существует непрерывное в $\bar{\Omega}$ и регулярное в Ω_j ($j = 0, 1$) решение $u(x, y) \neq 0$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

- 1) $x^{2\beta} u_x(x, y) \in C(\Omega_0 \cup OB)$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\beta} u_x(x, y) = 0$, $0 < y < 1$
- 2) $u(x, y) \in C^1(\Omega_0 \cup \sigma_0)$; $a u(x, y) + b \frac{\partial}{\partial n} u(x, y) = 0$, $(x, y) \in \sigma_0$;
- 3) $x^{1-2\beta} A_{0x}^{1, \sqrt{\lambda}} \left\{ x D_{0x; x^2}^{\beta} \left[x^{4\beta-2} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) \right] \right\} + c u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$;
- 4) для каждого $x \in (0, 1)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{-2\beta} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

где a, b, c — заданные действительные числа, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, n — внешняя нормаль к $\sigma_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\}$,

$$A_{0x}^{1, \sqrt{\lambda}} [f(x)] \equiv f(x) - \int_0^x f(t) \frac{t}{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left(\sqrt{\lambda x(x-t)} \right) dt,$$

$$D_{0x; q(x)}^{\delta} [f(x)] \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \cdot \frac{1}{q'(x)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) q'(t) dt}{[q(x) - q(t)]^{\delta}}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция Эйлера.

В данном докладе речь будет идти о полноте системы собственных функций задачи $A_\lambda^1(\beta < 1/2)$, т. е. доказана следующая

Теорема. Пусть $0 < \beta < 1/2$ выполнено одно из условий $a = 0$, $b = 0$, $\{a \cdot b \neq 0\}$, $\{(a/b) - 2\beta + \omega_1 \geq 0\}$. Тогда задача $A_\lambda^1(\beta < 1/2)$ имеет счетное число собственных чисел и собственных функций. Собственные числа определяются как корни λ_{nm} уравнений

$$(\alpha - 2\beta b) J_{\omega_n}(\sqrt{\lambda_{nm}}r) + b\sqrt{\lambda} J_{\omega_n}(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad n \in N,$$

а собственные функции в области Ω_0 равенством

$$u_{nm}(x, y) = c_{nm} r^{-2\beta} J_{\omega_n}(\sqrt{\lambda_{nm}}r) \{F(\beta + \omega_n/2, \beta - \omega_n/2, \beta + 1/2; \sin^2 \varphi) +$$

$$\gamma k_n (\sin \varphi)^{1-2\beta} F[(1 + \omega_n)/2, (1 - \omega_n)/2, (3/2) - \beta; \sin^2 \varphi], \quad n, m \in N$$

и в области Ω_1 — как решения видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) при $\lambda = \lambda_{nm}$. Если $\beta \in (0, 1/4)$ и $c \in I$, то система собственных функций задачи $A_\lambda^1(\beta < 1/2)$ полна в $L_2(\Omega_0)$, а если $\beta \in [1/4, 1/2)$ и $c \in I$, то полна в $L_2(\Omega_0)$ с весом r^ε ($\varepsilon = \text{const} > 2\beta - 1/2$), где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \text{arctg}(y/x)$, $I = (-\infty, -c_2) \cup (-c_1, +\infty)$, $c_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma(\beta)$, $c_2 = c_1(1 + \sin \beta\pi + \cos \beta\pi)$, $\gamma = 1 + c/c_1$, $\zeta = (\gamma + \sin \beta\pi)/\cos \beta\pi$, $k_n = \Gamma(1 - \beta + \omega_n/2)\Gamma(\beta + 1/2)/[\Gamma(\beta + \omega_n/2)(-\beta + 1/2)]$,

$$\omega_n = \begin{cases} 2(n-1) + (2/\pi) \text{arctg} \zeta & \text{при } \text{arctg} \zeta > \beta\pi, \\ 2n + (2/\pi) \text{arctg} \zeta & \text{при } \text{arctg} \zeta \leq \beta\pi, \end{cases}$$

F — гипергеометрическая функция Гаусса, $c_{nm} \neq 0$ — произвольные числа, причем в [2] в структуре ω_n вместо $\text{arctg} \zeta$ ошибочно написан $\text{arctg} \zeta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. // Материалы III Международной конференции "Нелокальные краевые задачи — родственные проблемы математической биологии, информатики и физики". Нальчик, 2006. С. 251–257.