

УДК 517.956

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

© М. С. Салахитдинов, А. Масутова

mathinst@uzsci.net, milayamaya83@mail.ru

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$|y|^l u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (1)$$

где $l = m$ при $y > 0$, $m > 0$ и $l = n$ при $y < 0$, $-1 < n < 0$.

При $y > 0$ уравнение (1) является уравнением гиперболического типа I рода и $y = 0$ не является характеристикой этого уравнения. При $y < 0$ уравнение (1) является уравнением гиперболического типа II рода и $y = 0$ является огибающей семейства характеристик (1) и, следовательно, характеристикой этого уравнения.

Пусть D — область, ограниченная характеристиками:

$$\begin{aligned} AC : x - \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} &= 0, & AD : x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} &= 0, \\ BC : x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} &= 1, & BD : x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} &= 1. \end{aligned}$$

Введем обозначения: $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $J = (0, 1)$.Задача А. Найти в области D регулярное решение уравнения (1)

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u^-(x, y), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u^+(x, y)|_{BC} &= \psi_+(x), & \frac{1}{2} &\leq x \leq 1, \\ u^-(x, y)|_{AD} &= \psi_-(x), & 0 &\leq x \leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$\begin{aligned} u^+(x, 0) &= u^-(x, 0), \\ u_y^+(x, 0) &= -u_y^-(x, 0), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\psi_+(x)$, $\psi_-(x)$ — заданные функции.**Теорема 1.** Однородная задача А ($\psi_+(x) = \psi_-(x) = 0$) при выполнении условий

- 1) $a(x, y) \leq 0$, $b(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$,
- 2) $a_x(x, y) < 0$, $b_y(x, y) < 0$, $c(x, y) > 0$, $(x, y) \in D_1$,
- 3) $a_x(x, y) > 0$, $b_y(x, y) > 0$, $c(x, y) < 0$, $(x, y) \in D_2$

имеет только тривиальное решение.

Задача В. Найти в области D регулярное решение уравнения (1)

$$u(x, y) = \begin{cases} u^+(x, y), & (x, y) \in D_1, \\ u^-(x, y), & (x, y) \in D_2, \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$D_{0x}^{\beta_1} x^{2\beta_1-1} u[\theta_0(x)] + u^+(x, 0) = a_1(x),$$

$$D_{0x}^{1-\beta_2} u[\theta_1(x)] + u_y^-(x, 0) = a_2(x),$$

где $2\beta_1 = \frac{m}{m+2}$, $2\beta_2 = \frac{n}{n+2}$;

$$\theta_0(x_0) = \frac{x_0}{2} + i \left[\frac{m+2}{4} x_0 \right]^{\frac{2}{m+2}}, \quad \theta_1(x_0) = \frac{x_0}{2} - i \left[\frac{n+2}{4} x_0 \right]^{\frac{2}{n+2}}$$

— аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x_0, 0) \in J$, с характеристиками AC и AD , соответственно; $a_1(x)$, $a_2(x)$ — заданные функции.

Теорема 2. Задача В при условии, что $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$ однозначно разрешима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, Yangiyo'l poligraf servis, 2005.
2. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. Москва: Высшая школа, 1985.