Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 286–287

УДК 517.925

ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Ж. С. Сартабанов, З. Ж. Алеуова *

* zaleuova@mail.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(\tau, e\tau + \alpha), \tag{1}$$

где A — постоянная $n \times n$ матрица, собственные значения $\lambda = \lambda(A)$ которой удовлетворяет условию

$$\lambda(A) \neq 2\pi i \sum_{j=0}^{m} k_j \nu_j, \tag{2}$$

для всех $k_j \in Z$ — множество целых чисел, $\nu_j = \omega_j^{-1} > 0$ — частоты, рационально не соизмеримые между собой, $j = \overline{0,m}$, а свободный член $f(\tau, e\tau + \alpha)$ — n-вектор-функция, обладающая свойствами периодичности и непрерывности при $\tau \in R = (-\infty, +\infty), \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in R \times ... \times R = R^m$ вида

$$f(\tau + \theta, t + k\omega) = f(\tau, t) \in C(R \times R^m), \forall k \in Z^m. \tag{3}$$

Здесь $\nu_s = \omega_s^{-1}, s = \overline{0,m}, e = (1, ..., 1) - m$ — вектор, $\theta = \omega_0, \omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ — периоды, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m), k = (k_1, ..., k_m), Z^m$ — декартова степень множества целых чисел, C — класс непрерывных вектор-функций.

Заметим, что при выполнении условия (2) матрица A наряду с чисто мнимыми собственными значениями указанной формы, не имеет и нулевого собственного значения.

Функция $f(\tau, e\tau + \alpha)$ называется псевдопериодической по τ с периодом (θ, ω), которая при $\alpha = 0$ обращается в квазипериодическую функцию с частотным базисом $(\nu_0, \nu) = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m)$.

Поставим задачу об исследовании вопроса о существовании псевдопериодических решений системы (1) при условиях (2), (3).

Покажем, что при условии (2) однородная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{4}$$

с матрицантом $X(\tau) = exp[A\tau]$ не имеет псевдопериодических решений, кроме тривиального.

Действительно, если система (4) имеет псевдопериодическое решение $x(\tau, \alpha) = \xi(\tau, e\tau + \alpha)$ с периодом (θ, ω), отличное от нулевого, то имеем ряд Фурье вида $\xi(\tau, e\tau+\alpha) \sim \sum\limits_{s} \xi_s(\alpha) exp\{[s_0\nu_0\tau + \sum\limits_{j=1}^{m} s_j\nu_j(\tau+\alpha_j)]2\pi i\}$, где $s = (s_0, s_1, ..., s_m) \in Z^{1+m}$. Это означает, что матрица A имеет собственные значения, представимые в виде $\lambda(A) = 2\pi i \sum\limits_{j=0}^{m} k_j\nu_j$, что противоречит условию (2).

В дальнейшем, под интегралом $\int\limits_{(\beta,b)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds$ функции $\varphi(\tau,t)$ от многих переменных (τ,t) по прямой $h=s, \lambda=es+\alpha$ с параметром $s\in R$ понимаем разность значений $\Phi(\delta,d)-\Phi(\beta,b)$ первообразной $\Phi(h,\lambda)$ по s, где $(\beta,b),(\delta,d)$ — произвольные точки пространства временных переменных (τ,t). При условии непрерывности $\varphi(\tau,t)$ в $R\times R^m$ легко показать, что ее интеграл обладает свойствами 1) Аддитивности : $\int\limits_{(\beta,b)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds = \int\limits_{(\beta,b)}^{(\sigma,c)} \varphi(h,\lambda)ds + \int\limits_{(\sigma,c)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds$; 2) сдвига переменных (h,λ) на (σ,c): $\int\limits_{(\beta,b)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds = \int\limits_{(\beta-\sigma,b-c)}^{(\delta-\sigma,d-c)} \varphi(h+\sigma,\lambda+c)ds$; 3) D — дифференцирования по верхнему пределу $D\int\limits_{(\beta,b)}^{(\tau,t)} \varphi(h,\lambda)ds = \varphi(\tau,t)$, где (σ,c) — произвольная точка пространства переменных (τ,t).

Очевидно, что общее решение $x(\tau,\alpha)$ системы (1) при условии (3) можно представить в виде

$$x(\tau,e\tau+\alpha) = X(\tau)x^0 + \int\limits_{(0,\alpha)}^{(\tau,e\tau+\alpha)} X(\tau)X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds, \tag{5}$$

где $x^0 = x(0,\alpha,\alpha)$ — начальные данные. В силу соотношения (5) сдвигом переменных $(\tau,t) = (\tau,e\tau+\alpha)$ на периоды (θ,ω) получим опять же решение системы (1) в виде

$$x(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha) = X(\tau+\theta)x^0 + \int\limits_{(0,\alpha)}^{(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)} X(\tau+\theta)X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds, \tag{6}$$

Если при некотором значении x^0 имеем (θ,ω) — псевдопериодическое решение $x = x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha) = x^*(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha,\alpha)$ системы (1), то исключив из системы (5), (6) параметр x^0, пользуясь свойством аддитивности интеграла и с учетом неособенности матриканта $X(\tau)$ получим

$$[X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)]x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha) = \int\limits_{(\tau,e\tau+\alpha)}^{(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)} X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds.$$

Отсюда учитывая, что в силу условия (2) матрица $X^{-1}(\tau+\theta) \neq X^{-1}(\tau)$ для всех $\tau\in R$, имеем интегральное представление псевдопериодического решения $x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)$ системы (1) в виде

$$x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha) = [X^{-1}(\tau+\theta) - X^{-1}(\tau)]^{-1} \int\limits_{(\tau,e\tau+\alpha)}^{(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)} X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds. \tag{7}$$

Единственность этого решения следует из условия (2).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *При условиях* (2) *и* (3) *линейная система дифференциальных уравнений* (1) *имеет единственное псевдопериодическое решение с периодом* (θ,ω), *представимое в виде* (7).