УДК 517.984.54

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

© А. И. Седов*, Г. А. Закирова

* sedov@masu.ru

Магнитогорский государственный университет, Магнитогорск

Пусть $\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \dots, n\}$, $a_j > 0$. В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0 , порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta \geq \frac{n}{2}$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ оператора T будем нумеровать одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t , т. е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_t}$.

Введем также следующие обозначения: $r_t = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}$, $t > 1$;

$$r_1 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1); \quad r_0 = \inf_t r_t; \quad s_1^2 = \sum_{t=1}^\infty r_t^2 \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4, \quad s_2^2 = \sum_{t=1}^\infty \frac{r_t^2}{(r_t - r)^4},$$

$$s_\infty = \sum_{t=1}^\infty r_t \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2, \quad \gamma_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| = r_0\}, \quad V = \prod_{j=1}^n a_j.$$

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2^n}{V}} \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right),$$

где $m = (m_1, \dots, m_n)$, $m_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 1. Пусть $\beta > \frac{3n}{4}$, $r < \min\{r_0, \frac{1}{s_1 \sqrt{2^n}}\}$, $\omega = 2^n s_1 r$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^n V} \left(\sum_{t=1}^\infty \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

то существует функция $p \in L_2(\Pi)$, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k, \tag{1}$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$, P — оператор умножения на функцию $p \in L_2(\Pi)$, причем

$$p(a_1 - x_1, x_2, \dots, x_n) = p(x_1, a_2 - x_2, \dots, x_n) = \dots = p(x_1, x_2, \dots, a_n - x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

для почти всех $x \in \Pi$,

$$(p, \varphi_m)_{L_2(\Pi)} = 0, \quad \text{при } \prod_{j=1}^n m_j = 0, \quad m_j = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

$$\|p\|_{L_2(\Pi)} \leq \frac{r}{2}.$$

Теорема 2. Пусть $\beta > n$, $r < \min\{r_0, \frac{1}{s_\infty 2^n}\}$, $\omega = 2^n s_\infty r$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$2^n \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t| < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

то существует потенциал $p \in L_\infty(\Pi)$, такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$ выполняется (1), причем имеют место свойства (2), (3) и

$$\|p\|_{L_\infty} \leq \frac{r}{2}.$$

Теорема 3. Пусть a_j^2/a_k^2 — иррациональное число, $k \neq j$ и P — оператор, найденный в теореме 2. Если $r < \frac{\sqrt{V}}{2^{n+2}s_2}$, то этот оператор единственный.