Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 294–294

УДК 517.43

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

© В. И. Семенов

semvi@kuzstu.ru

Кузбасский государственный технический университет, Кемерово

Интенсивное изучение уравнений Навье – Стокса велось в течение последнего столетия многими авторами (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). В задаче Коши

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}u_iu_{k,i}=\nu\Delta u_k+P_{,k},\quad \mathrm{div}u=0,\quad u(0,x)=\phi(x),\quad k=1,2,\ldots,n,$$

где отображение ϕ принадлежит классу $C^\infty(R^n)$ и удовлетворяет условию роста $|D^\alpha\phi(x)|\geq C(\alpha,m)(1+|x|)^{-m}$ при любом натуральном значении m, мы изучаем некоторые свойства ее гладких решений. Определяя соленоидальные векторные поля S^m формулами: $S^0(x)=\phi(x)$, $S_k^1=-\sum_{i=1}^{n}\phi_i\phi_{k,i}+\nu\Delta\phi_k-P_{,k}^1$, $k=1,2,\ldots,n,$

$$S_k^{m+1}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}C_m^pS_i^pS_{k,i}^{m-p}+\nu\Delta\S_k^m-P_{,k}^m,\quad k=1,2,\ldots,n,$$

доказываем следующее их свойство.

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел k и m скалярные произведения элементов S^k,S^m в пространстве $L_2(R^n)$ удовлетворяют равенствам:* $(S^k,S^{m+1})+(S^m,S^{k+1})=2\nu(\Delta S^m,S^k)$.

Опираясь на данную теорему, выводим аналогичное равенство для произвольного гладкого решения рассматриваемой задачи Коши, если это решение вместе со своими производными является элементом соболевского пространства $W_2^l(R^n)$. В качестве следствия имеем обобщение результата Дж. Серрина оценок норм производных гладких решений на произвольную размерность, которые им доказаны в случае $n=2$.

Еще один аспект связан с оценкой отклонения гладкого решения от своего многочлена Тейлора.

Теорема 2. *Если гладкое решение задачи Коши в каждый фиксированный момент времени t принадлежит соболевскому классу $W_2^{l+1}(R^n)$, то имеет место асимптотическое равенство: $\|u-v^l\|_{W_2^l(R^n)}=O(t^{l+0,5})$ при $t\to 0$, где v^l — многочлен Тейлора гладкого решения и относительно t в точке $t_0=0$.*

Замечание. В классе квазиконформных деформаций имеет место единственность решения задачи Коши. Условие квазиконформности означает ограниченность тензора напряжений соленоидальных деформаций, что является естественным с физической точки зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Издание второе. М: Наука, 1970.