

УДК 539.374

ЭВОЛЮЦИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

sen@sibsau.ru, gomonova@mail.ru

*Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск*

Многие процессы, проходящие в сплошных средах, описываются системами дифференциальных уравнений гиперболического типа. Теория пластичности не является исключением. Часть систем уравнений для плоских задач теории пластичности (а также некоторых других) имеет гиперболический тип. Более того, ряд авторов считает [1], и это подтверждено экспериментально, что гиперболичность уравнений теории пластичности — это неотъемлемое свойство систем, описывающих реальные пластические процессы.

В теории пластичности, как, собственно, и в любой области, где приходится решать и исследовать нелинейные дифференциальные уравнения, всегда слишком мало точных решений, годных для описания реальных процессов. Численные результаты, конечно, важны, но они всегда применимы только для конкретной задачи, часто вызывают сомнение в их истинности и не дают той общности взгляда на проблему, как точные решения.

Ниже предложен способ увеличения количества точных решений для систем гиперболических уравнений.

Многие двумерные системы уравнений гиперболического типа [2] допускают оператор вида:

$$X = \xi(u, v)\partial_x + \eta(u, v)\partial_y$$

в смысле Ли. Здесь u, v — зависимые переменные, x, y — независимые переменные, (ξ, η) — произвольное решение некоторой линейной системы уравнений. А это, в свою очередь, означает, что исходная система допускает преобразование вида:

$$x' = x + a\xi(u, v), \quad y' = y + a\eta(u, v), \quad (1)$$

где a — групповой параметр. Преобразование (1) переводит систему уравнений в себя, а, следовательно, каждое решение системы преобразуется снова в решение этой же системы для каждого значения параметра a . Тем самым, из одного точного решения мы получаем целый класс точных решений. Построенному семейству решений присущ один недостаток (он раньше останавливал исследователей): все решения этого класса являются неявными и часто имеющими сложную структуру. Поэтому авторы доклада предлагают определять и строить не сами решения, а характеристики. Характеристики не только полностью определяют решение, но и являются важным параметром описываемого решением механического процесса. Эта методика позволяет наблюдать за эволюцией характеристики под действием групповых преобразований. Она была использована для ряда систем уравнений теории пластичности и позволила описать некоторые важные механические процессы, которые до сих пор не имели аналитического описания. К ним, в частности, относится описание сжатия пластического слоя жесткими плитами без ограничения толщины слоя.

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений идеальной пластичности:

$$\begin{cases} \sigma_x - 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) = 0, \\ \sigma_y - 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где σ — гидростатическое давление, θ — угол между осью Ox и первым главным направлением тензора напряжений, k — постоянная пластичности. Индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной. Эта система допускает оператор вида:

$$X = \xi(\sigma, \theta)\partial_x + \eta(\sigma, \theta)\partial_y,$$

где (ξ, η) — произвольное решение системы

$$\begin{cases} \xi_\theta - 2k(\xi_\sigma \cos 2\theta + \eta_\sigma \sin 2\theta) = 0, \\ \eta_\theta - 2k(\xi_\sigma \sin 2\theta - \eta_\sigma \cos 2\theta) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Известно, что характеристики системы (2) имеют следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \theta.$$

На решении Прандтля для системы (2)

$$\sigma = -kx + k\sqrt{1-y^2}, \quad \theta = \frac{1}{2} \arccos(y)$$

эти характеристики записываются следующим образом:

$$x = \pm 2\theta + \sin 2\theta, \quad y = \cos 2\theta.$$

Учитывая сказанное выше, последние уравнения могут быть преобразованы к виду:

$$x = \pm 2\theta + \sin 2\theta + a\xi, \quad y = \cos 2\theta + a\eta.$$

В работе, согласно предложенной методике, авторами построены характеристики решения Прандтля, соответствующие различным значениям параметра a и различным (ξ, η) — решениям системы уравнений (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 10–11.
2. Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2001. С. 117–118.