

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

© С. Я. Серовайский

serovajskys@mail.ru

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

При решении задач оптимального управления и обратных задач математической физики для получения необходимых условий экстремума или вычисления градиента функционала возникает необходимость в дифференцировании решения рассматриваемой системы по параметру, играющему роль управления или идентифицируемой величины. Пусть, к примеру, в открытой ограниченной области Ω n -мерного евклидова пространства рассматривается однородная задача Дирихле для уравнения

$$-\Delta u + |u|^p u = f.$$

Из теории монотонных операторов следует, что рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение $u = u(f)$ из пространства $Y = H_0^1(\Omega) \cap L_{p+2}(\Omega)$ для любого f из пространства X , сопряженного к Y . Для доказательства дифференцируемости зависимости $u = u(f)$ в некоторой точке f_0 можно воспользоваться теоремой об обратной функции. Так, если однородная задача Дирихле для линеаризованного уравнения

$$-\Delta u + (p+1)|u_0|^{p-1}u = f$$

для любого $f \in X$ имеет единственное решение $u \in Y$, где $u_0 = u(f_0)$, то зависимость $u = u(f)$ непрерывно дифференцируема в точке f_0 . Для этой задачи легко устанавливается априорная оценка решения в пространстве $Y_* = H_0^1(\Omega)$. Это позволяет доказать, что для всех f из пространства X_* , сопряженного с Y_* , линеаризованное уравнение однозначно разрешимо в пространстве Y_* . Тем самым, если размерность области n и показатель нелинейности p столь малы, что имеет место вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_{p+2}(\Omega)$, желаемое свойство линеаризованного уравнения действительно имеет место, а значит, исследуемая зависимость оказывается дифференцируемой.

В отсутствии указанного вложения мы не имеем возможности получить априорную оценку решения линеаризованного уравнения в пространстве $L_{p+2}(\Omega)$. Самое большее, на что можно рассчитывать, так это на оценку его решения в пространстве $Y_0 = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid |u_0|^{p/2}u \in L_2(\Omega)\}$. Тогда для любого f из пространства X_0 , сопряженного с Y_0 , это уравнение однозначно разрешимо в пространстве Y_0 . Однако этого явно не достаточно для справедливости условий теоремы об обратной функции.

Предположим, однако, что и в отсутствии указанного вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_{p+2}(\Omega)$ отображение $u(\cdot) : X \rightarrow Y$ дифференцируемо хотя бы в смысле Гато в произвольной точке $f_0 \in X$. Тогда существует такой линейный непрерывный оператор $D : X \rightarrow Y$, что при $\sigma \rightarrow 0$ имеет место сходимость $[u(f_0 + \sigma h) - u(f_0)]/\sigma \rightarrow Dh$ в Y для любого $h \in X$. Переходя к пределу после деления на σ в равенстве

$$-\Delta[u(f_0 + \sigma h) - u(f_0)] + [|u(f_0 + \sigma h)|^p u(f_0 + \sigma h) - |u(f_0)|^p u(f_0)] = \sigma h,$$

приходим к соотношению

$$-\Delta Dh + (p+1)|u_0|^{p-1}Dh = h.$$

Таким образом, для любого $f \in X$ линеаризованное уравнение имеет решение $u = Dh$ из множества Y . Предположим теперь, что функция f_0 является столь гладкой, что соответствующее ей решение u_0 исходного уравнения непрерывно. Тогда для любой функции $u \in Y$

левая часть линеаризованного уравнения принадлежит X_* , являющемуся в отсутствие указанного вложения собственным подмножеством X . Тем самым при $f \in X \setminus X_*$ линеаризованное уравнение не может иметь решения из множества Y , что противоречит установленному ранее результату, опирающемуся на гипотезу о дифференцируемости зависимости $u = u(f)$.

Итак, при достаточно малых значениях параметров n и p решение задачи дифференцируемо по свободному члену, а при больших значениях — не дифференцируемо. В частности, можно зафиксировать размерность области и плавно увеличивать показатель нелинейности. При переходе через некоторое критическое значение $p_* = p_*(n)$ справедливое ранее вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_{p+2}(\Omega)$ перестает выполняться. Создается впечатление, что при малом изменении параметра p свойства зависимости $u = u(f)$ изменились скачком: дифференцируемость была и исчезла.

Возникает вопрос: не свидетельствует ли полученный результат о том, что дифференцируемость в смысле Гато оказывается слишком грубым инструментом для исследования дифференциальных свойств указанной зависимости? Действительно, ранее было установлено, что линеаризованное уравнения однозначно разрешимо в более слабом смысле и для более узкого класса свободных членов, чем это нужно для применения теоремы об обратной функции, гарантирующей дифференцируемость выше указанной зависимости в классическом смысле. Отметим также, что соответствующие пространства зависят от точки, в которой вычисляется производная. Можно предположить, что справедливость ослабленного варианта условий теоремы об обратной функции гарантирует справедливость некоторой более слабой формы дифференцируемости решения рассматриваемого уравнения по свободному члену. В результате приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор A , действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y , называется *расширенно дифференцируемым* в точке $f_0 \in X$, если существуют такие банаховы пространства X_* , X_0 , Y_* , Y_0 , удовлетворяющие непрерывным вложениям $X_* \subset X_0 \subset X$, $Y \subset Y_0 \subset Y_*$, и такой линейный непрерывный оператор $D : X_0 \rightarrow Y_0$, что имеет место сходимость $[A(f_0 + \sigma h) - Af_0]/\sigma \rightarrow Dh$ в Y_* для всех $h \in X_*$.

Отметим, что область определения расширенной производной уже, а область значений — шире по сравнению с производной Гато, причем соответствующая сходимость выполняется в еще более слабой топологии и для еще более узкого класса направлений h . Естественно, при $X_* = X$, $Y_* = Y$ мы получаем обычную производную Гато. Справедливо следующее утверждение:

Теорема. Зависимость $u = u(f)$ для рассматриваемого уравнения произвольной точке $f_0 \in X$ имеет расширенную производную, определяемую равенством

$$\int_{\Omega} g Dh dx = \int_{\Omega} z(g) h dx \quad \forall h \in X_0, g \in Y'_0,$$

где все пространства определены выше, а функция $z = z(g)$ есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta z + (p+1)|u_0|^p z = g.$$

Итак, зависимость решения рассматриваемого уравнения от свободного члена является расширенно дифференцируемой при всех значениях параметров задачи. Отметим, что чем выше значения размерности области и скорости роста нелинейности, тем сильнее пространства, входящие в определение расширенной производной, отличаются от исходных пространств. Таким образом, по мере роста указанных параметров дифференциальные свойства исследуемой зависимости меняются плавно, а не резко.

Полученными результатами можно воспользоваться для решения оптимизационных и обратных задач, связанных с рассматриваемым уравнением. Кроме того, можно доказать теорему о расширенной дифференцируемости обратного оператора, проявлением которой для исследуемого уравнения оказывается указанный выше результат.