

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА – ХОПФА

© М. С. Сгибнев

sgibnev@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работах [1, 2] исследовалось однородное уравнение Винера – Хопфа

$$S(x) = \int_0^{\infty} k(x-y)S(y) dy, \quad x > 0, \quad (1)$$

где $S(x)$ — неизвестная функция, а $k(x)$ — плотность некоторого симметричного распределения вероятностей F .

Функция $S(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется P^* -решением уравнения (1), если она не убывает, непрерывна справа, не обращается всюду в нуль и $S(x) = 0$ при $x < 0$.

В работе [1] доказано существование единственного P^* -решения $S(x)$ уравнения (1) с нормировкой $S(0+) = 1$. Элементарные асимптотические свойства решения установлены в [1, 2].

Перепишем уравнение (1) в виде

$$S(x) = \int_{-\infty}^x S(x-y)k(y) dy, \quad x > 0.$$

Мы будем рассматривать уравнение более общего вида

$$S(x) = \int_{-\infty}^x S(x-y)F(dy), \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$. Назовём уравнение (2) *однородным обобщённым уравнением Винера – Хопфа*, чтобы отличить его от классического однородного уравнения Винера – Хопфа (1).

Опишем класс распределений вероятностей F , для которых будет установлено существование P^* -решения однородного обобщённого уравнения Винера – Хопфа.

Пусть X_k , $k \geq 1$ — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F , не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$ с вероятностью единица). Если существует математическое ожидание $EX_1 := \int_{-\infty}^{\infty} x F(dx)$, то при $EX_1 = 0$ случайное блуждание $\{S_n\}$ будет осциллирующим, а при $EX_1 > 0$ ($EX_1 < 0$) случайное блуждание уходит в $+\infty$ (в $-\infty$).

Мы исследуем уравнение (2) с произвольным распределением F , порождающим случайное блуждание осциллирующего типа. Симметричные плотности вероятностей, рассматривавшиеся в работах [1, 2], приводят к случайным блужданиям осциллирующего типа.

Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geq 1: S_n > 0\}$ и $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$. Обозначим через F_+ распределение случайной величины $\mathcal{H}_+$. Пусть U_+ — мера восстановления, порождённая распределением F_+ , т. е. $U_+ := \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{n*}$, где F_+^{n*} — n -кратная свёртка распределения F_+ и F_+^{0*} — атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле. Функция восстановления, порождённая распределением F_+ , определяется как $U_+(x) := U_+((-\infty, x])$.

Теорема. Предположим, что F — распределение вероятностей осциллирующего типа. Тогда функция восстановления $U_+(x)$, порождённая распределением F_+ первой лестничной высоты $\mathcal{H}_+$, является P^* -решением однородного обобщённого уравнения Винера – Хопфа (2), обладающим нормировкой $U_+(0+) = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spitzer F. The Wiener – Hopf equation whose kernel is a probability density // Duke Math. J. 1957. V. 24. P. 327–343.
2. Spitzer F. The Wiener – Hopf equation whose kernel is a probability density. II // Duke Math. J. 1960. V. 27. P. 363–372.