

УДК 517.94

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© А. Ш. Шалданбаев

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. В работе [1] исследована с точки зрения устойчивости обратная задача теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Нами исследована разновидность этой задачи с точки зрения сильной разрешимости. Точная постановка задачи такова:

ЗАДАЧА ОЗТ. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x, t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=1}, \quad (2)$$

где $f(x, t) \in L^2(\Omega)$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Под регулярным решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнение (1) и краевые условия (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $u \in L^2(\Omega)$ назовем сильным решением, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, \dots$, и удовлетворяющих краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f при $n \rightarrow \infty$.

2. Полученный результат.

Теорема. Краевая задача

$$u_t(x, t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где $f(x, t) \in L^2(\Omega)$, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Sf, u_{n0})|^2}{\lambda_{n0}^2} < +\infty,$$

где $Sf(x, t) = f(x, 1-t)$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, $|\lambda_{n0}| \leq \sqrt{6}(n\pi)^2 \exp(-n^2\pi^2)$ — наименьшее собственное значение при фиксированном n , $u_{n0}(x, t)$ — собственная функция спектральной задачи

$$u_t(x, t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, 1-t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

соответствующая собственному значению λ_{n0} .

Следствие. Норма обратного оператора краевой задачи (1), (2) неограничена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 205 с.
2. Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.