

УДК 517.929

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев*, Г. М. Спабекова**

mtshomanbaeva@mail.ru

* Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан;

** Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$AB : 0 \leq t \leq T, x = 0; \quad BC : 0 \leq x \leq l, t = T; \quad CD : 0 \leq t \leq T, x = l; \quad DA : 0 \leq x \leq l, t = 0.$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω . Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

ЗАДАЧА S. Изучить спектральные свойства оператора:

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t), \quad (1)$$

$$u \in D(L) = \{u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0\}. \quad (2)$$

2. Полученный результат.

Теорема 2.1 Если $\frac{2\pi T}{l^2}$ — иррациональное число, то спектр оператора

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u \in D(L) = \{u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0\},$$

совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений, отличных от нуля, и из предельных точек собственных значений. Оператор $\bar{L}$ самосопряжен и обратим, но $(\bar{L})^{-1}$ неограничен.

Если $\frac{2\pi T}{l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \notin \left(m^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то оператор $\bar{L}$ самосопряжен и ограниченно обратим. Спектр оператора $\bar{L}$ состоит из бесконечного множества значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельных точек, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений λ_{mn} , $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Оператор $(\bar{L})^{-1}$ ограничен, но не компактен.

Если $\frac{2\pi T}{l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \in \left(m^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, то обратный оператор $(\bar{L})^{-1}$ не существует, $\lambda = 0$ является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от $-\infty$ до $+\infty$. Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений λ_{mn} , $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Ноль может оказаться бесконечнократным собственным значением.

ПРИМЕЧАНИЕ. (x) означает дробную часть числа x .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. Кальменов Т. Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.