Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 375–376

УДК 517.929

О СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB : 0 \le t \le T,\, x = 0; \quad BC : 0 \le x \le l,\, t = T; \quad CD : 0 \le t \le T,\, x = l; \quad DA : 0 \le x \le l,\, t = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Задача Коши – Дирихле. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t\,(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющая граничным условиям

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$.

Определение 1. Под регулярным решением задачи $(1),(2)$ будем понимать функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2) [1].

Определение 2. Функцию $u(x,t) \in L^2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right), n = 1,2,\ldots$ и удовлетворяющих краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}, n = 1,2,\ldots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f при $n \to \infty$ [1].

Определение 3. Краевая задача $(1),(2)$ называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и единственно [1].

2. Полученные результаты.

Теорема 1. *Спектральная задача*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad m = 1,2\ldots;\, n = 0,1,2,\ldots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T}, \quad m = 1,2,\ldots;\, n = 0,1,2,\ldots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, $\Omega = [0,l] \times [0,T]$.

Теорема 2. *Задача Коши – Дирихле*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

сильно разрешима в пространстве $L^2(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда число* $\dfrac{1}{4}$ *не является предельной точкой числовой последовательности*

$$\left(\frac{m^2\pi T}{2l^2}\right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где (x) *— дробная часть числа* x *.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.