Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 360–361

УДК 517.929

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. В пространстве $L^2(0,1)$ изучить спектральные свойства оператора

$$Lu = u'(1-x) + au(1-x), \tag{1}$$

$$D(L) = \left\{ u \in C^1[0,1], \quad u(0)\left(1 + \frac{ka}{\operatorname{sh} a}\right) - u(1)\frac{ka}{\operatorname{sh} a} \cdot e^a = 0 \right\}, \tag{2}$$

где a, k — константы.

В настоящее время спектральные свойства оператора (1), (2) изучены достаточно полно, поэтому приведем лишь основные результаты.

2. Основные результаты.

Если $a \neq 0$, то среди операторов (1), (2) нет вольтерровых. Если $a = 0$, то обратный оператор к оператору (1), (2) имеет вид

$$L^{-1}f(x) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x f(1-t)\,dt - \int\limits_0^1 f(1-t)\,dt\right] + \left(k + \frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 f(t)\,dt.$$

Среди этого семейства операторов встречаются вольтерровые операторы.

Теорема 1. *Оператор*

$$L^{-1}f(x) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^x f(1-t)\,dt - \int\limits_0^1 f(1-t)\,dt\right] + \left(k + \frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 f(t)\,dt$$

вольтерров тогда и только тогда, когда $k = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i}{2}$.

Теорема 2. *Если* $a \neq 0$ *, то система корневых векторов оператора*

$$Lu = u'(1-x) + au(1-x),$$

$$D(L) = \left\{ u \in C^1[0,1], \quad u(0)\left(1 + \frac{ka}{\operatorname{sh} a}\right) - u(1)\frac{ka}{\operatorname{sh} a} \cdot e^a = 0 \right\},$$

полна в пространстве $L^2(0,1)$ *при любом* $k \in C$.

Теорема 3. *Если*

$$1) \quad k \neq \frac{\operatorname{sh} a}{(1 \pm ie^a)a}$$

и

$$2) \quad k \neq \frac{-\operatorname{sh} a}{1 \mp e^a},$$

то корневые векторы оператора

$$Lu = u'(1-x) + au(1-x),$$

$$D(L) = \left\{ u \in C^1[0,1], \quad u(0)\left(1 + \frac{ka}{\operatorname{sh} a}\right) - u(1)\frac{ka}{\operatorname{sh} a} \cdot e^a = 0 \right\},$$

образуют базис Рисса пространства $L^2(0,1)$.

Получено разложение в базисе Рисса и в базисе Шмидта и проведен их сравнительный анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977. 329 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.