

УДК 517.956.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© Е. Ф. Шарин

eugene_sharin@mail.ru

Институт математики и информатики ЯГУ, Якутск

Работа посвящена исследованию гладкости решений краевых задач для параболических уравнений с негладкими коэффициентами в классах Гёльдера. Такие краевые задачи стали предметом изучения с начала XX века. Одним из первых работ в этом направлении были работы М. Жевре, позже были опубликованы труды М. А. Лаврентьева, А. В. Бицадзе, С. А. Терсенова, И. М. Петрушко, В. Н. Монахова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова и многих других авторов.

Актуальность изучения таких задач обоснована их физическим применением в моделировании таких процессов как распространение тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков и другие.

Настоящая работа состоит из двух частей, в которых рассматриваются следующие задачи.

I. В полосе $\Pi = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) будем искать в полуполосах $\Pi^+ = \{\Pi : x > 0\}$, $\Pi^- = \{\Pi : x < 0\}$ как решение двух начально-краевых задач при выполнении условий склеивания

$$\begin{cases} u(-0, t) = u(+0, t), \\ u'_x(-0, t) = u'_x(+0, t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x > 0, \\ \varphi_2(x), & x < 0, \end{cases}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные функции.

Методом потенциалов простого слоя доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи из пространства Гельдера $H^{2+\gamma_1, 1+\frac{\gamma_1}{2}}_x t(\Pi^\pm)$.

II. Рассмотрим в полосе $\Pi = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$ следующую задачу:

$$u_t - \operatorname{sgn}(x)u_{xx} = f(x, t) \quad (3)$$

при граничных условиях

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x > 0, \quad (4)$$

$$u(x, T) = u_T(x), \quad x < 0. \quad (5)$$

В данной работе будем исследовать классические решения. Относительно правой части в (2) будем предполагать, что $f \in L_2(\Pi)$. Кроме того, потребуем чтобы функции u_0 и u_T в (3) и (4) удовлетворяли условию Гельдера с некоторым положительным показателем α , т. е.

$$\begin{cases} u_0(x) \in H^\alpha(0, \infty), \\ u_T(x) \in H^\alpha(-\infty, 0). \end{cases}$$

Также рассмотрены вопросы, связанные с дифференциальными свойствами решений $u(x, t)$ в обоих рассмотренных случаях.