Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 384–385

УДК 519.633

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© М. Х. Шхануков-Лафишев *, М. М. Лафишева **

* math@math.kbsu.ru

* *Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик;*
** *Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Нальчик*

Работа посвящена рассмотрению локально-одномерных схем А. А. Самарского (см. [1]) для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка в многомерной области.

В цилиндре $Q_{t_0} = G \times (0, t_0]$, основание которого является p-мерный паралеллепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : \ 0 < x_k < \ell_k, \ k = \overline{1,p}\}$, рассмотрим следующую задачу для уравнения диффузии дробного порядка:

$$D_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad L = \sum_{k=1}^{p} L_k, \quad (x,t) \in Q_{t_0},$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x,t), \quad t \geq 0, \quad \bar{G} = G + \Gamma, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(t), \quad x \in \bar{G},$$

где $D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\overset{\bullet}{u}(x,\eta) d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}$, $\quad 0 < \alpha < 1$ — регуляризованная дробная производная Римана – Лиувилля, $\overset{\bullet}{u} = \partial u \backslash \partial t$.

На отрезке $[0, t_0]$ введем сетку

$$\bar{\omega}'_{\tau} = \left\{0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p}\right)\tau, \ j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \ k = 1, 2, \ldots, p\right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

По аналогии с [1] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку одномерных уравнений

$$\frac{1}{p} D_{0t}^{\alpha} v = L_k v + f_k, \quad t_{j+\frac{k-1}{p}} < t \leqslant t_{j+\frac{k}{p}}, \quad k = \overline{1,p}; \quad \sum_{k=1}^{p} f_k = f.$$

На каждом полуинтервале $\triangle_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}} \right]$, $k = \overline{1,p}$, будем последовательно решать уравнения

$$P_k v_{(k)} = \frac{1}{p} D_{0t}^{\alpha} v - L_k v - f_k = 0, \quad x \in G, \quad t \in \triangle_k, \quad k = \overline{1,p}, \tag{2}$$

полагая $v_{(1)}(x,0) = u_0(x)$, $v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1$; $v_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = v_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right)$, $k = 2, 3, \ldots, p$; $j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1$, $v_{(k)} = \mu(x,t)$, $x \in \Gamma_k$, Γ_k — множество граничных узлов по x_k.

Каждое из уравнений (2) заменим разностной схемой

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha} \right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}} \right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{3}$$

$$y^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}}, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$
$$y(x, 0) = u_0(x), \quad \Lambda_k y = y_{\bar{x}_k x_k},$$

$\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов.

Нетрудно показать, что ЛОС (3) обладает суммарной аппроксимацией. Для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\left\| y^{j+1} \right\|_C \leqslant \left\| y^0 \right\|_C + \max_{0 < t' \leqslant (j+1)\tau} \left\| \mu(x, t') \right\|_{C_j} + p^{1-\alpha} \Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^{j} \tau^\alpha \sum_{k=1}^{p} \max_{0 < s \leqslant k} \left\| \varphi^{j' + \frac{s}{p}} \right\|_C . \qquad (4)$$

Из неравенства (4) выводится оценка для погрешности

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant M \left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1} \right), \quad z = y - u.$$

Итак, справедлива

Теорема. *Пусть задача (1) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_{t_0}$ *решение и существуют непрерывные производные в* $\overline{Q}_{t_0}$ *:* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ *,* $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$ *,* $\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}$ *,* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ *,* $1 \leqslant k, v \leqslant p$ *, и* $1/2 < \alpha < 1$ *,* $h^2 = o(\tau^{1-\alpha})$ *. Тогда решение разностной задачи (3) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1) со скоростью* $O\left(h^2/\tau^{1-\alpha} + \tau^{2\alpha-1}\right)$ *,* $h = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} h_k$ *.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.