

УДК 517.929

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА КОШИ – ДИРИХЛЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© М. Т. Шоманбаева

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками: $AB : 0 \leq t \leq T, x = 0$; $BC : 0 \leq x \leq l, t = T$; $CD : 0 \leq t \leq T, x = l$; $DA : 0 \leq x \leq l, t = 0$. Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω . Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Оператором Коши – Дирихле* назовем следующий оператор

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t),$$

$$D(L) = \{u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0\}.$$

ЗАДАЧА S. Изучить природу спектра оператора Коши – Дирихле.

2. Полученный результат.

Теорема. (а) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — иррациональное число, то спектр оператора \bar{L}

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. Спектр состоит из бесконечного (счетного) множества собственных значений и из предельных точек собственных значений. Оператор \bar{L} обратим, но $(\bar{L})^{-1}$ неограничен.

(б) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \notin \overline{(m^2 \frac{T\pi}{2l^2})}$, $m = 1, 2, \dots$, то оператор \bar{L} — ограниченно обратим, где \bar{L} — замыкание оператора L , (x) — дробная часть числа x , верхняя черта последовательности означает операцию замыкания. Спектр оператора \bar{L} состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельных точек, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений λ_{mn} , $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

(в) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \in \overline{(m^2 \frac{T\pi}{2l^2})}$, $m = 1, 2, \dots$, то обратный оператор $(\bar{L})^{-1}$ не существует, $\lambda = 0$ является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от $-\infty$ до $+\infty$. Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений λ_{mn} , $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ноль может быть бесконечнократным собственным значением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
2. Вейль Г. Избранные труды. М.: Наука, 1984.