

УДК 517.9

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ М. САЙГО В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

© Т. В. Шувалова

matstat@mail.ru

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара

Рассмотрим уравнение

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha(u_x + u_y) = 0,$$

в области D , ограниченной при $x > 0$, $y > 0$ кривой Жордана σ с концами в точках $A(1; 0)$ и $B(0; 1)$ и отрезком $OB(x = 0, 0 \leq y \leq 1)$; при $x > 0$, $y < 0$ характеристиками уравнения являются: $OC: x + y = 0$, $AC: \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$.

Обозначим через $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ эллиптическую часть области D и через $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ гиперболическую часть области D .

Пусть $\theta_0(x) = \frac{x}{4} - i\frac{x}{4}$ — точка пересечения характеристики уравнения, выходящей из точки $(x; 0)$, $0 < x < 1$ с характеристикой OC .

Для уравнения поставим и исследуем нелокальную краевую задачу, характерной особенностью которой является наличие оператора дробного дифференцирования в краевом условии.

Следуя работе японского математика [1], введем обобщенный оператор дробного интегрирования следующим образом

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}) dt, \\ (0 < x < 1, \alpha > 0, \beta, \eta \in C); \\ \frac{d^n}{dx^n} I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} \varphi(x), \\ (0 < x < 1, \alpha < 0, \beta, \eta \in C, n = [-\alpha] + 1). \end{cases}$$

ЗАДАЧА I . Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $u(x, y)$ является решением уравнения в области D ;
- 2) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1)$;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y)|_{\sigma} = \varphi(s), 0 \leq s \leq l;$$

$$u(0; y) = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq 1;$$

$$I_{0+}^{\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}, \alpha-\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} u[\theta_0(x)] = Ax^{\alpha-\frac{3}{2}} a(x) u(x, 0) + B(x);$$

- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{\alpha} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{\alpha} u_y(x, y), (0 < x < 1);$$

где l — длина кривой σ , $\varphi(s)$ и $\varphi_1(y)$ — заданные непрерывные функции; A — отрицательная действительная константа; $a(x) \in C[0, 1]$, $a(x)$ — положительная, неубывающая на отрезке $[0, 1]$ функция; $b(x) \in H^{\lambda}[0, 1]$.

Доказательство единственности решения задачи I следует из принципа экстремума, а именно из двух лемм о знаке функции $\nu(x) = \lim_{y \rightarrow 0 \pm 0} (\pm y)^{\alpha} u_y(x, y)$, $0 < x < 1$ в области

эллиптичности D_0 и в области гиперболичности D_1 и условия сопряжения. Отличительной особенностью этого доказательства является то, что при получении соотношения между функциями $\tau(x) = u(x, 0)$ и $\nu(x)$ в области гиперболичности использовалась формула композиции обобщенных операторов дробного интегродифференцирования с отрицательным первым параметром, которая наряду с другими была впервые получена в работе [2].

Доказано существование регулярного решения исследуемой задачи в случае, когда "нормальная кривая" $x + y = 1$ содержится в эллиптической области. Это доказательство основано на следующем. С помощью преобразования Мелина вопрос разрешимости задачи I сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения относительно неизвестной функции $\nu(x)$. Окончательно вопрос однозначной разрешимости задачи I эквивалентно сводится к вопросу разрешимости уравнения Фредгольма II рода с регулярным ядром и непрерывной правой частью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saigo M. // Math. Japan. 1978. Vol. 11, №2. P. 135-143.
2. Шувалова Т. В. Некоторые композиционные свойства обобщенных операторов дробного дифференцирования // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 42. С. 45-48.