Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 299–300

УДК 517.9

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФРЕДГОЛЬМОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© Н. А. Сидоров

sidorov@math.isu.runnet.ru

Иркутский государственный университет, Иркутск

В некоторых механических, электротехнических и других системах возникают дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с фредгольмовым оператором в главной части. В теории и приложениях таких задач важно знать условия существования решений, определенных и ограниченных на всей оси (см. [1], [2, гл. 5, 6] и [3]). В данной заметке при условии существования главной оператор-функции Грина (в смысле [5, стр. 119]) у линейного уравнения (3) и отсутствия у фредгольмова оператора B A-присоединенных элементов доказана общая теорема существования и единственности решения уравнения (1), определенного и ограниченного на всей оси.

Рассмотрим уравнение
$$B\dot{x} = Ax + f(t) + \epsilon F(x,t), \tag{1}$$
Здесь замкнутый оператор $B : D \subset E_1 \to E_2$ — фредгольмов, $\bar{D} = E_1$, $A \in L(E_1 \to E_2)$, E_1, E_2 — банаховы пространства, $\{\phi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$, — базисы соответственно в $N(B)$ и $N^*(B)$, $\det < A\phi_i, \psi_k > \neq 0$, f, F — непрерывные по t и по x, а по x оператор F и непрерывно дифференцируем. Введем матрицу $\Xi = [< A\phi_i, \psi_k >]$, непрерывно обратимый оператор $\hat{B} = B + \sum\limits_1^n < A\dot{,}\psi_i > A\phi_i$ и условие:

I. оператор $A - i\mu\hat{B}$ при $\mu \in R^1$ непрерывно обратим.

Лемма. *Если выполнено условие I и* $\sup ||f(t)|| < \infty$, *то при* $\epsilon = 0$ *соответствующее (1) линейное уравнение имеет ровно одно ограниченное на всей оси решение*
$$\bar{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{B}^{-1} G(t-s) f(s) ds - (\Xi^{-1} < f, \psi >, \phi), \tag{2}$$
где $G(t)$ *— главная оператор-функция Грина уравнения*
$$\dot{y} = A\hat{B}^{-1} y. \tag{3}$$

Доказательство. Используя замену $x = \hat{B}^{-1} y + (\xi, \phi)$ с условием
$$< y, \psi >= 0, \tag{4}$$
получим относительно y регулярное уравнение. Последнее в силу экспоненциальной дихотомичности, вытекающей из условия I, имеет на основании теоремы 4.1 из [5, стр. 119] единственное ограниченное решение, определенное на всей оси. Далее условие (4) позволяет однозначно найти вектор-функцию ξ и построить искомое решение (2).

Замечание. Лемма допускает обобщение, если B имеет полный A-жорданов набор.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы,* $sup||F_x^{(i)}|| < \infty, \;\; i = 0, 1, t \in R^1, ||x - \bar{x}|| \leq R.$ *Тогда уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение* $x(t, \epsilon) \to \bar{x}(t),$ *при* $\epsilon \to 0, t \in R^1.$

Доказательство следует из леммы и принципа сжимающих отображений.

Замечание. Лемма и теорема позволяют, используя регуляризаторы из [4], строить ограниченные периодические решения уравнения (1) методом последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сидоров Н. А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 4. С. 569–578.
2. *Sidorov N. A. et al.* Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis. Kluwer Ac. Publ., 2002.
3. *Чистякова Е. В., Чистяков В. Ф.* К вопросу о существовании периодических решений // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 3. С. 148–158.
4. *Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н.* О регуляризации интегро-дифференциальных уравнений // Международная конференция “Тихонов и современная математика”. Москва, 2006. С. 256–257.
5. *Далецкин Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.