УДК 517.95

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ У ГАМИЛЬТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ, ИМЕЮЩИМ НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

© В. В. Сказка

skazka@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A^2 u + \varepsilon B(\omega t) u \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H. Здесь A — линейный самосопряженный оператор, $B(t)$ — 2π-периодическая оператор-функция. Стандартным способом уравнение (1) может быть представлено в виде гамильтонового уравнения

$$\mathcal{J} \frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{H}(t) w,$$

где $\mathcal{J}$ — обратимый антисимметричный оператор, а $\mathcal{H}$ (гамильтониан) — эрмитов. Уравнение (1) рассматривалось многими авторами. Нас будет интересовать явление так называемого параметрического резонанса, т. е. ситуация, когда при $\varepsilon = 0$ решения уравнения (1) устойчивы, а при любых достаточно малых положительных ε — нет. В том случае, если (1) — система обыкновенных дифференциальных уравнений была построена достаточно полная теория параметрического резонанса [1, 2]. Вопросами устойчивости (1) в различных пространствах и с различными операторами $A, B(t)$ посвящено большое количество работ. Подробную библиографию см., например, [3, 4, 6]. При этом при определенных ω у уравнения (1) при любых ε, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, появляются экспоненциально растущие решения. Но во всех этих работах предполагалось, что у оператора A спектр точечный. В тоже время возникают задачи, когда спектр оператора A является непрерывным [5, 6].

В данной работе строится пример уравнения типа (1), у которого оператор A имеет непрерывный спектр и у которого экспоненциально растущие решения могут появляться только при ε больших, чем некоторое пороговое значение.

В пространстве $L_2(1,2)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x^2 u - \varepsilon \cos(\omega t)(x-1)(x-2) \int_1^2 (\xi-1)(\xi-2) u(t,\xi) d\xi = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \end{array} \tag{2}$$

Задача (2), как это следует из общей теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, разрешима для любых u_0 и u_1, причем имеет место оценка $\|u\|_{L_2(1,2)} \leqslant C\left(\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)}\right) e^{\Lambda t}$ с некоторым $\Lambda > 0$.

Наша цель доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для задачи (2) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для любого ω справедлива оценка*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_2(1,2)} \leqslant C(t+1)\left(\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Тем самым мы покажем, что для достаточно малых ε у уравнения (2) нет экспоненциально растущих решений и они могут возникать только при ε больших, чем некоторое пороговое значение.

Доказательство. Сведем решение задачи (2) к решению интегрального уравнения. Для этого обозначим

$$v(t) = \int_1^2 (\xi - 1)(\xi - 2)u(t, \xi)d\xi.$$

Для нахождения $v(t)$ получается интегральное уравнение:

$$v(t) = F(t) + \varepsilon \int_0^t K(t, \tau)v(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^2 \left(u_0(x)\cos(xt) + u_1(x)\frac{\sin(xt)}{x} \right)(x-1)(x-2)dx, \\ K(t,\tau) &= \cos(\omega\tau)\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2 \frac{\sin(x(t-\tau))}{x}dx. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3) можно выписать в виде ряда по степеняи ε, причем он будет мажорируеться рядом $\left(\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)}\right)(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(8\varepsilon)^n)$, откуда нетрудно получить необходимую оценку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-08-00386), Президиума РАН (программа № 14, проект № 115), Сибирского отделения РАН (проект 1.6, 42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
2. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
3. *Фомин В. Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. *Dorovsky V. N., Belonosov V. S., Belonosov A. S.* Numerical investigation of parametric resonance in water-oil structures conaining gas //Math. Comput. Mod. 2002. V. 36. P. 203–209.
6. *Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В.* Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 2. С. 37–70.