Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 303–304

УДК 519.6:517.589

ДВОЙНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

© С. Л. Скороходов

skor@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Изучается задача Орра – Зоммерфельда для функции $\varphi(y)$

$$\frac{1}{i\alpha R}\Big(\varphi^{(IV)}(y)-2\alpha^2\,\varphi''(y)+\alpha^4\,\varphi(y)\Big)\;-\;\Big(U(y)-\lambda\Big)\Big(\varphi''(y)-\alpha^2\,\varphi(y)\Big)+U''(y)\,\varphi(y)=0\,,$$

с однородными краевыми условиями $\varphi(\pm 1)=\varphi'(\pm 1)=0$. Здесь аргумент $y\in[-1,\,1]$, параметр $R>0$ — число Рейнольдса, $\alpha>0$ — заданное волновое число, $U(y)$ — функция скорости основного потока жидкости, λ и $\varphi(y)$ — искомые собственные значения (СЗ) и собственные функции.

Для профиля скорости $U(y)$ рассматривают три случая: 1) течение Куэтта $U(y)=y$, 2) течение Пуазейля $U(y)=1-y^2$, 3) общее течение Куэтта – Пуазейля $U(y)=ay^2+by+c$.

Для высокоточного решения задачи разработан аналитико-численный метод, использующий представление решения $\varphi(y)$ в виде комбинации четырех степенных разложений в окрестности граничных точек $y=-1$ и $y=1$:

$$\varphi_{(1,\,2)}(y)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1,\,2)}(y+1)^{k+2}\,,\qquad \varphi_{(3,\,4)}(y)=\sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(3,\,4)}(1-y)^{k+2}\,, \tag{1}$$

где для коэффицентов $d_k=d_k(R,\alpha,\lambda)$ и $e_k=e_k(R,\alpha,\lambda)$ получены однородные рекуррентные уравнения шестого порядка. С помощью теории Пуанкаре – Биркгофа исследована асимптотика решений d_k и e_k при $k\to\infty$. Показано, что в случае течения Куэтта – Пуазейля асимптотика коэффициентов d_k и e_k имеет вид $d_k/d_{k-1}\sim k^{-1/2}$ при $k\to\infty$, а в случае течения Куэтта — $d_k/d_{k-1}\sim k^{-2/3}$ при $k\to\infty$. Таким образом, ряды (1) задают целые функции.

Преставляя решение $\varphi(y)$ в виде комбинации разложений (1) и осуществляя сшивку решений в некоторой выбранной точке $y_*\in(-1,1)$, получаем уравнение для вронскиана Wr:

$$\mathrm{Wr}(\lambda)\;=\;\mathrm{Wr}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4;\;\lambda;\;y_*)\;=\;0\,; \tag{2}$$

это уравнение является основным для вычисления искомого спектра λ.

Для случая течения Куэтта детально исследованы траектории СЗ $\lambda_n(R)$ при изменении числа $R\in(0,\,10^6)$. Численно показано, что функции $\lambda_n(R)$ имеют в окрестности узловой точки $\lambda_*=-i/\sqrt{3}$ счетное множество точек ветвления R_k второго порядка, в окрестности которых пара СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ имеет поведение

$$\lambda_{n,\,m}(R)\;=\;\pm\sqrt{R-R_k}\;\Psi(R)\;+\;\Phi(R)\,,$$

где $\Psi(R)$ и $\Phi(R)$ — регулярные функции в окрестности точки $R=R_k$. При непрерывном увеличении числа $R>0$ пары СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ сначала образуют при $R=R_k$ двойные СЗ на мнимой оси, которые затем распадаются на пары простых СЗ, симметричных относительно мнимой оси. При дальнейшем увеличении числа R эти простые СЗ приближаются к своему предельному графу — двум симметричным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, соединяющим точки $\lambda=-1,\ \lambda_*=-i/\sqrt{3}$ и $\lambda=1,\ \lambda_*=-i/\sqrt{3}$.

Процесс образования и распада двойных СЗ соответствует переходу СЗ с нижней ветви спектра, расположенной на мнимой отрицательной оси, на четыре других ветви, окаймляющих отрезки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Картина распределения СЗ в совокупности составляет портрет "спектрального галстука".

Для вычисления точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$ был разработан специальный итерационный метод. Необходимость его была вызвана тем, что классический метод Ньютона решения уравнения (2) вблизи точек ветвления R_k перестает сходиться, поскольку производная $\mathrm{Wr}'(\lambda) \to 0$ при $R \to R_k$.

Разработанный метод позволил вычислять простые СЗ, точки ветвления и двойные СЗ с точностью до 100 десятичных значащих цифр вплоть до чисел Рейнольдса $R = 10^6$. Было перевычислено большое число имеющихся в литературе результатов для течений Куэтта и Пуазейля. При этом было отмечено, что представленные СЗ λ_n с большими номерами n часто приводятся со значительной погрешностью; работ по точкам ветвления и двойным СЗ найти не удалось.

Приведем значения первых четырех точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$ для течения Куэтта с волновым числом $\alpha = 1$:

$$R_1 = 61.9177587,\ \lambda_{3,4} = -0.799834981i; \qquad R_2 = 65.5202291,\ \lambda_{1,2} = -0.388160962i;$$

$$R_3 = 205.7777806,\ \lambda_{6,7} = -0.665270089i; \qquad R_4 = 214.4033834,\ \lambda_{6,7} = -0.647397672i.$$

Аналогичная картина образования и распада двойных СЗ для течения Куэтта имела место при изменении волнового числа $\alpha > 0$.

Проведенный численный анализ позволяет предположить, что верна

Гипотеза. *Собственные значения $\lambda_n(R)$ задачи Орра – Зоммерфельда для течения Куэтта, рассматриваемые как функции числа Рейнольдса R при фиксированном $\alpha > 0$, имеют счетное множество точек ветвления второго порядка $R_k > 0$, в которых двойные СЗ $\lambda_n(R_k)$ чисто мнимые отрицательные и справедливо*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_n(R_k) \to -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07-01-00295, 07-01-00503) и Программы № 3 ОМН РАН.