

УДК 517.946

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ И КОНЕЧНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Ж. Н. Тасмамбетов

tasmam@rambler.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Методом Фробениуса – Латышевой изучен ряд частных случаев специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\begin{cases} (a_{00}^{(0)} + a_{10}^{(0)} \cdot x) \cdot Z_{xx} + p_1(x) \cdot g_4(y) \cdot Z_{xy} + p_2(x) \cdot Z_x + g_5(y) \cdot Z_y + p_3(x) \cdot Z = 0, \\ (b_{00}^{(0)} + b_{01}^{(0)} \cdot y) \cdot Z_{yy} + g_1(y) \cdot p_4(x) \cdot Z_{xy} + p_5(y) \cdot Z_x + g_2(y) \cdot Z_y + g_3(y) \cdot Z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где коэффициенты

$$p_i(x) = a_{00}^{(i)} + a_{10}^{(i)} \cdot x, \quad g_i(y) = b_{00}^{(i)} + b_{01}^{(i)} \cdot y, \quad i = \overline{1, 5} \quad (2)$$

($a_{00}^{(j)}, a_{10}^{(j)}, b_{00}^{(j)}$ и $b_{01}^{(j)}$ ($j = \overline{0, 5}$) — некоторые постоянные), а $Z = Z(x, y)$ — общая неизвестная.

Особые кривые системы (1) определяются приравнением к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy} : $\left(-\frac{a_{00}^{(0)}}{a_{10}^{(0)}}; -\frac{b_{00}^{(0)}}{b_{01}^{(0)}}\right)$, $\left(-\frac{a_{00}^{(0)}}{a_{10}^{(0)}}; \infty\right)$, $\left(\infty; -\frac{b_{00}^{(0)}}{b_{01}^{(0)}}\right)$ и $(\infty; \infty)$.

Важно определить регулярность и иррегулярность этих особенностей. Метод Фробениуса – Латышевой в зависимости от этих особенностей позволяет построить решения заданной системы, используя понятия ранга $p = 1 + k$ (k — подранг) и антиранга $m = -1 - \chi$ (χ — антиподранг) системы. Пусть ранг $p > 0$, а антиранг $m \leq 0$. Тогда для таких систем справедлива:

Теорема. Система, для которой $p > 0, m \leq 0$, имеет решение вида

$$Z = \exp(Q(x, y)) \cdot x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} A_{\mu, \nu} \cdot x^\mu \cdot y^\nu, \quad A_{0,0} \neq 0, \quad (3)$$

$$Q(x, y) = \frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1} \cdot x^{k+1} + \frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1} \cdot y^{k+1} + \dots + \alpha_{1,1} \cdot xy + \alpha_{1,0} \cdot x + \alpha_{0,1} \cdot y,$$

где $\rho, \sigma, A_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$) — неизвестные постоянные; $\alpha_{k+1,0}, \alpha_{0,k+1}, \dots, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,0}, \alpha_{0,1}$ — неопределенные параметры и причем ряд в правой части (3) сходится вблизи особенности $(0, 0)$.

Решение вида (3) называется нормально-регулярным.

В работе изучены несколько важных частных случаев системы (1), (2), решениями которой являются вырожденные гипергеометрические функции двух переменных и ортогональные многочлены Лагерра, Эрмита и других.

Так, при $a_{0,0}^{(0)} = 0, b_{0,0}^{(0)} = 0$ из (1), (2) выводятся вырожденные гипергеометрические системы Горна $\Phi_2, \Phi_3, \Psi_2, \Gamma_2, H_4, H_5$. Показано, что они имеют нормально-регулярные решения вида

$$Z = \exp(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \cdot x^\rho \cdot y^\sigma \cdot \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} C_{\mu, \nu} \cdot x^\mu \cdot y^\nu, \quad C_{0,0} \neq 0, \quad (4)$$

где $\rho, \sigma, C_{\mu, \nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$), α, β — некоторые постоянные, которые следует определить.

Решения вида (4) получены в вырожденных гипергеометрических функциях двух переменных.