Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 307–308

УДК 517.925.5:519.216

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

© М. И. Тлеубергенов

marat207@math.kz

Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан

Методом квазиобращения в сочетании с правилом Ито стохастического дифференцирования сложной функции приводится решение одного из вариантов задачи восстановления дифференциальной системы в классе стохастических дифференциальных уравнений по заданным свойствам движения, которые зависят от части переменных. Определяется множество управлений, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2, 3]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [3]. В [4–6] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \\ \dot{y} = R(x,y,t) + D(x,y,t)U + \sigma(x,y,t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить множество управлений U и множество матриц диффузий σ так, чтобы множество (2)

$$\Lambda(t): \quad \begin{cases} \lambda_1(x,t) = 0, \\ \lambda_2(x,y,t) = 0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \lambda_1 \in C^{22}_{xt},\ \lambda_2 \in C^{121}_{xyt}, \tag{2}$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Здесь $x \in R^n, y \in R^p, U \in R^r, \xi \in R^k, \lambda_1 \in R^{m_1}, \lambda_2 \in R^{m_2}, m_1 + m_2 = m$, $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\ldots,\xi_k(t,\omega)\}$ — система независимых винеровских процессов [7], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Предполагается, что вектор-функции $f(x,y,t), R(x,y,t), D(x,y,t)$ непрерывны по t и липшицевы по x,y в области

$$U_H(\Lambda) = \left\{\gamma = (x^T, y^T)^T:\ \rho\bigl(\gamma, \Lambda(t)\bigr) < H, \quad H > 0\right\}, \tag{3}$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = = (x_0^T, y_0^T, z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [7].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений $\sigma \equiv 0$ достаточно полно исследована в [3, с. 27], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ и заданным множеством вида $\Lambda(t): \lambda(x,\dot{x},t) = 0,\ \lambda \in R^m$ (см. в [6]).

Предположим дополнительно, что $f \in C^{121}_{xyt}$.

Для решения задачи в силу стохастического дифференцирования Ито [7] составляются уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 = G_1 + \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(DU_1 + \sigma\dot{\xi}), \\ \dot{\lambda}_2 = G_2 + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}(DU_2 + \sigma\dot{\xi}). \end{cases} \tag{4}$$

где $G_1 = \dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial t\partial x} + \dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x}f + f^T\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial x}f + \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}R + \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}S_1, \;\; S_1 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right]$,
$G_2 = \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x}f + \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}R + S_2, \;\; S_2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2\lambda_2}{\partial y\partial y} : \sigma\sigma^T\right]$.

Далее, следуя методу Еругина [1] вводятся произвольные функции: соответственно m_1 - и m_2 -мерные вектор-функции A_1, A_2 и соответственно $(m_1\times k)$ и $(m_2\times k)$ матрицы B_1, B_2, обладающие свойством $A_1(0,0,x,y,t)\equiv 0, \quad A_2(0,x,y,t)\equiv 0, \quad B_1(0,0,x,y,t)\equiv 0, \quad B_2(0,x,y,t) \equiv 0$, такие, что имеют место равенства

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 = A_1(\lambda_1,\dot{\lambda}_1,x,y,t) + B_1(\lambda_1,\dot{\lambda}_1,x,y,t)\dot{\xi}, \\ \dot{\lambda}_2 = A_2(\lambda_2,x,y,t) + B_2(\lambda_2,x,y,t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{5}$$

На основе уравнений (4) и (5) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}DU_1 = A_1 - G_1, \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}DU_2 = A_2 - G_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}\sigma_1 = B_1, \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y}\sigma_2 = B_2, \end{cases}$$

из которых методом квазиобращения [3] с использованием обозначений из [3] определим управляющие параметры $\{U_1\},\{U_2\}$ и коэффициенты диффузии $\{\sigma_1\},\{\sigma_2\}$ в виде

$$\begin{cases} U_1 = s_1[H_1C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1), \\ U_2 = s_2[H_2C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{1i} = s_3[H_3C_1] + (H_3)^+B_{1i}, \\ \sigma_{2i} = s_4[H_4C_4] + (H_4)^+B_{2i}, \end{cases} \tag{6}$$

где $H_1 = \lambda_{1x}f_yD$, $H_2 = \lambda_{2y}D$, $H_3 = \lambda_{1x}f_y$, $H_4 = \lambda_{2y}$, а σ_{1i}, σ_{2i}, B_{1i}, B_{1i} — i-е столбцы соответственно матриц σ_1, σ_2, B_1, B_2.

Следовательно, справедлива

Теорема. *Для того чтобы система уравнений* (1) *имела заданное интегральное многообразие* (2) *необходимо и достаточно, чтобы множество управлений* $\{U\}$ *и множество коэффициентов диффузии* $\{\sigma\}$ *имели вид* $\{U\} = \{U_1\}\bigcap\{U_2\}, \{\sigma\} = \{\sigma_1\}\bigcap\{\sigma_2\}$, *где* U_1, U_2, σ_1, σ_2 *определяются формулой* (6).

Полученный результат распространяет на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито известное в классе обыкновенных дифференциальных уравнений утверждение, доказанное в [3, стр. 27–29].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659–670.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. М., 1986. 224 с.
3. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.
4. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче динамики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". М. 1999. № 1. С. 48–51.
5. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Докл. МН-АН РК. Алматы. 1999. № 1. С. 53–60.
6. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 714–716.
7. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.