

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Ж. А. Токибетов

daulyl@kazsu.kz

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

В ряде задач представляет интерес системы, зависящие от некоторого параметра

$$-\Delta u + \lambda \frac{\partial}{\partial x} (u_x + v_y) = 0, \quad -\Delta v + \lambda \frac{\partial}{\partial y} (u_x + v_y) = 0, \quad (1)$$

где λ — вещественный параметр. Эта система сильно эллиптична при $\lambda < 1$, при $\lambda = 1$ вырождается, а при $\lambda > 1$ она эллиптична, но не является сильноэллиптической, однако при $\lambda = 2$ система (1) сильно связана, а при $\lambda > 1$ и $\lambda \neq 2$ слабо связана [1].

Будем искать решение системы (1) в круге $D \equiv (|z| \leq 1)$, когда на его границе S удовлетворяют краевым условиям

$$u = f_1(t), \quad v = f_2(t), \quad t \in S \quad (2)$$

в вырождающем случае, т. е. при $\lambda = 1$.

Вводя комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, обозначение $\omega = u + iv$ и производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned}$$

нашу систему (1) перепишем в виде

$$\lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}^2} + (\lambda - 2) \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (3)$$

Интегрируя систему (2) относительно $\omega(z)$ в случае $\lambda = 1$ получим

$$\omega(z) = \left(|z|^2 - 1 \right) \frac{\Phi'(z)}{z} + \overline{\Phi(z)} + \psi(z), \quad (4)$$

где $\Phi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции в круге $\bar{D}$.

Так как на S заданы значения $\omega(z)$ (2), то мы имеем линейную краевую задачу для двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\psi(z)$.

Здесь мы применяем один прямой способ [2] нахождения решения задачи (3), (2), не привлекая на оператора Шварца [3], ни системы сингулярных интегральных уравнений.

Умножим уравнение (4) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t - z}$$

и проинтегрируем по S :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\omega(t) dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\left(|t|^2 - 1 \right) \Phi'(t)}{t(t - z)} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\overline{\Phi(t)} dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\psi(t) dt}{t - z}.$$

Так как первые два слагаемые в правой части равны нулю, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\omega(t) dt}{t - z} = \psi(z). \quad (5)$$

Теперь вычтя (5) из (4) получим следующее соотношение

$$\omega(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\omega(t) dt}{t - z} = \left(|z|^2 - 1\right) \frac{\Phi'(z)}{z} + \overline{\Phi(z)}. \quad (6)$$

Если точку z стремим к некоторой граничной точке $t_0 \in S$, то оставаясь внутри круга D и используем формулы Сохоцкого – Племеля для предельных значений интеграла типа Коши, а также соотношение $t\bar{t} = 1$ на границе S , получаем на S

$$\frac{\overline{\omega(t_0)}}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\overline{\omega(t)} \overline{dt}}{\bar{t} - \bar{t}_0} = \Phi(t_0). \quad (7)$$

Здесь правой части стоит граничные значение функции, аналитической внутри единичного круга, а в левой части находятся граничные значение изнутри интеграла

$$-\frac{z}{2\pi i} \int_S \frac{\overline{\omega(t)} \overline{dt}}{1 - z\bar{t}},$$

а этот интеграл также является функцией, аналитической внутри D . Следовательно, продолжая (7) внутрь единичного круга D , получим равенство

$$-\frac{z}{2\pi i} \int_S \frac{\overline{\omega(t)} \overline{dt}}{1 - z\bar{t}} = \Phi(z). \quad (8)$$

Теперь подставив (8) в (6), получим решение задачи (3), (2):

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(t) dt}{t - z} + \frac{\bar{z}}{2\pi i} \int_S \frac{f(t) dt}{1 - \bar{z}t} - \frac{|z|^2 - 1}{2\pi i z} \int_S \frac{\overline{f(t)} \overline{dt}}{1 - z\bar{t}} \\ &\quad - \frac{|z|^2 - 1}{2\pi i} \int_S \frac{\bar{t} \overline{f(t)} \overline{dt}}{(1 - z\bar{t})^2}, \end{aligned}$$

где $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Виноградов В. С. Об одном методе решения краевой задачи для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса в случае плоскости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 6.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.