Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 313–314

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© А. А. Токова

tokova-aa@yandex.ru

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < r,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим нагруженное [1] уравнение

$$\Big(L_1 + L_2\delta\Big)u = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv a(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(y)\frac{\partial}{\partial x} + c(y), \qquad L_2 \equiv A(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + B(y)\frac{\partial}{\partial y} + C(y),$$

$\big(\delta u\big)(y)$ — среднее значение функции $u(x,y)$ по переменной x на сегменте $[0,r]$:

$$\big(\delta u\big)(y) = \frac{1}{r}\int\limits_0^r u(x,y)dx,$$

$a(y) > 0,\ 0 \leqslant y \leqslant T$, $f(x,y)$, $b(y)$, $c(y)$, $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$ — заданные непрерывные функции, $A(y) \neq 0\ \forall\ y \in [0,T]$. Через $\bar{\Omega}$ обозначим замыкание области Ω.

Уравнение (1) в области Ω является уравнением параболического типа с характеристической формой $\Theta(x,y;\xi) = a(y)\xi^2$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть решение $u = u(x,y)$, такое, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $\big(\delta u\big)(y) \in C^2(0,T)$.

Обозначим $D = b^2(y) - 4a(y)c(y)$; $2\lambda = b(y)/a(y)$; $2p = \sqrt{D}/a(y)$;

$$u_1(x,y) = 2e^{-\lambda x}\mathrm{ch}(px); \quad u_2(x,y) = \frac{1}{p}e^{-\lambda x}\mathrm{sh}(px);$$

$$w(x,y) = \frac{p - e^{-\lambda x}\left[\lambda\,\mathrm{sh}(px) + p\,\mathrm{ch}(px)\right]}{a(y)p(p^2-\lambda^2)};$$

$$F(x,y) = \frac{1}{a(y)p}\int\limits_0^x \mathrm{sh}[p(x-\xi)]e^{\lambda(\xi-x)}f(\xi,y)d\xi.$$

Справедлива следующая лемма об общем представлении решения уравнения (1).

Лемма. *Пусть* $f \in C(\bar{\Omega})$, f_y, $f_{yy} \in C(\Omega)$, $a(y), b(y), c(y) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$, $A(y), B(y)$, $C(y) \in C[0,T]$. *Тогда любое регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1) *представимо в виде*

$$u(x,y) = Q(x,y) + w(x,y)L_2\big(\delta u\big)(y) + F(x,y),$$

где $\big(\delta u\big)(y)$ *является решением уравнения*

$$\big(\delta u\big)(y)-\big(\delta w\big)(y)L_2\big(\delta u\big)(y)=\big(\delta Q\big)(y)+\big(\delta F\big)(y),$$

функция $Q(x,y)$ *является решением однородного уравнения* $L_1u=0$. *Функции* $\big(\delta u\big)(y)$, $\big(\delta Q\big)(y)$, $\big(\delta w\big)(y)$, $\big(\delta F\big)(y)$ *означают интегральные средние значения по переменной* $x\in[0,r]$ *функций* $u(x,y)$, $Q(x,y)$, $w(x,y)$, $F(x,y)$ *соответственно.*

Справедливо и обратное утверждение.

Рассмотрим следующую краевую задачу с локальным смещением [2].

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), такое, что $\big(\delta u\big)(y)\in C^1[0,T)$, u_x непрерывна вплоть до точек $(0,y)$ и (r,y), $0<y<T$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_x(r,y)=\alpha_1u(0,y)+\alpha_2u(r,y),\quad 0<y<T, \tag{2}$$

$$u_x(0,y)=\beta_1u(0,y)+\beta_2u(r,y),\quad 0<y<T, \tag{3}$$

$$\big(\delta u\big)(0)=\delta_0,\quad \big(\delta u\big)'(0)=\delta_1, \tag{4}$$

где α_i β_i, $(i=1,2)$, δ_0, δ_1 — заданные числа, причем $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$.

Условия (2) и (3) были названы В. А. Стекловым [3] условиями первого класса.

Используя метод общих решений и теорию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка доказана

Теорема. *Пусть соблюдены условия леммы, и выполняются условия*

$$\triangle(y)=\Big(u_{1x}(r,y)-\alpha_1u_1(0,y)-\alpha_2u_1(r,y)\Big)\Big(u_{2x}(0,y)-\beta_1u_2(0,y)-\beta_2u_2(r,y)\Big)$$

$$-\Big(u_{1x}(0,y)-\beta_1u_1(0,y)-\beta_2u_1(r,y)\Big)\Big(u_{2x}(r,y)-\alpha_1u_2(0,y)-\alpha_2u_2(r,y)\Big)\neq 0,$$

и

$$w_x(r,y)\Big[\big(\delta u_1\big)(y)\Big(\beta_1u_2(0,y)+\beta_2u_2(r,y)-u_{2x}(0,y)\Big)$$

$$+\big(\delta u_2\big)(y)\Big(u_{1x}(0,y)-\beta_1u_1(0,y)-\beta_2u_1(r,y)\Big)\Big]$$

$$+w(r,y)\Big[\big(\delta u_1\big)(y)\Big(\alpha_2\big[u_{2x}(0,y)-\beta_1u_2(0,y)\big]+\beta_2\big[\alpha_1u_2(0,y)-u_{2x}(r,y)\big]\Big)$$

$$+\big(\delta u_2\big)(y)\Big(\alpha_2\big[\beta_1u_1(0,y)-u_{1x}(0,y)\big]+\beta_2\big[u_{1x}(r,y)-\alpha_1u_1(0,y)\big]\Big)\Big]\neq-\triangle(y)\big(\delta w\big)(y).$$

Тогда существует единственное решение задачи 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М., 1995. 301 с.
3. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М., 1983. 432 с.