

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧАХ ДИРИХЛЕ И КОШИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

© Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян*

* armenak@web.am

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

Рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка с действительными постоянными коэффициентами в полупространстве $\mathbf{R}_+^3 = \{(x, y, t) | t > 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$. Как известно, при помощи линейного невырожденного преобразования неизвестных такое уравнение приводится к уравнению

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} - 2au_t - 2bu_x + cu = 0, \quad (x, y, t) \in \mathbf{R}_+^3, \quad (1)$$

где a, b, c — действительные постоянные. В дальнейшем обозначаем $\overline{\mathbf{R}_+^3} = \{(x, y, t) | t \geq 0, (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$ и предполагаем, что бесконечно удаленная точка не принадлежит $\overline{\mathbf{R}_+^3}$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}_+^3$.

Пусть $\alpha \geq 0$ — фиксированное число.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Класс $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$ состоит из функций $u \in C(\overline{\mathbf{R}_+^3}) \cap C^2(\mathbf{R}_+^3)$, удовлетворяющих на бесконечности оценке

$$|u(x, y, t)| \leq K(1 + x^2 + y^2)^{0,5\alpha}(1 + t)^\beta, \quad (x, y, t) \in \overline{\mathbf{R}_+^3}, \quad (2)$$

где K и β некоторые положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от u . Аналогично определяется класс функций $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$ с той лишь разницей, что неравенство (2) заменяется неравенством

$$|u(x, y, t)| \leq K(1 + x^2 + y^2 + t^2)^{0,5\alpha}, \quad (x, y, t) \in \overline{\mathbf{R}_+^3}.$$

Очевидно, что $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3}) \subset Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Класс $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$ состоит из функций f , принадлежащих множеству $C(\mathbf{R}^2)$ и удовлетворяющих на бесконечности оценке

$$|f(x, y)| \leq K_1(1 + x^2 + y^2)^{0,5\alpha}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

где K_1 — положительная постоянная.

В работе рассматривается следующая задача Дирихле для уравнения (1).

Определить решение u уравнения (1) из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (3)$$

где f — заданная функция из класса $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$.

Задачу (1), (3) при $f \equiv 0$ будем называть однородной.

В монографии [1] доказано, что в ограниченной области задача Дирихле для уравнения (1) (с аналитическими коэффициентами) фредгольмова и получено условие однозначной разрешимости этой задачи. Эти утверждения И. Н. Векуа получил в двумерном случае, однако они верны и для произвольной размерности и доказываются аналогично. В [2] доказано, что если $c \leq 0$, то задача Дирихле для уравнения (1) в полупространстве корректна в классе обобщенных функций H . В классе $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$ задача (1), (3) исследована в [3] и доказано, что при $c \leq 0$

эта задача нетерова. В случае $a = b = c = 0$ в [4] доказано, что задача (1), (3) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет $0,5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений. Здесь и в дальнейшем $n = [\alpha]$.

В представленной работе задача (1), (3) при $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ исследуется в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. Если задача (1), (3) нетерова в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$, то $c \leq 0$.

Теорема 2. Если $c < 0$ или $c = 0$ и $a > 0$, то однородная задача (1), (3) имеет только нулевое решение. При $c = 0$ и $a \leq 0$ однородная задача (1), (3) имеет $0,5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений.

Теорема 3. При $c < 0$ или $c = 0$ и $a \neq 0$ неоднородная задача (1), (3) имеет решение в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$ для $\alpha \geq 0$. В случае $c = a = 0$, $b \neq 0$ и $0 \leq \alpha < 0,5$ неоднородная задача (1), (3) также имеет решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы думаем, что теорема 3 верна и при $c = a = 0$, $b \neq 0$ и $\alpha \geq 0,5$, однако это требует дополнительного исследования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сравнение полученных теорем с результатами работы [3] показывает, что класс $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$ является более естественным для задачи (1), (3), чем класс $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$.

В работе рассматривается также задача Коши для уравнения (1) при $c = 0$, $a \leq 0$ с полиномиальными данными Коши и доказывается существование и единственность решения этой задачи в классе $Q(\overline{\mathbf{R}_+^3}) = \bigcup_{\alpha \geq 0} Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}_+^3})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: Гостехиздат, 1948. 364 с.
2. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 328 с.
3. Товмасын Н. Е. Задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1015–1024.
4. Товмасын Н. Е. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2, № 2. С. 290–312.
5. Tovmasyan N. E. Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. World Scientific, Singapore, 1994. 232 p.
6. Дикополов Г. В. О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Матем. сборник. 1962. Т. 59, № 2. С. 215–228.