

УДК 517.915

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© Б. Х. Турметов*, Г. О. Дуйсеева

* turmetovbh@mail.ru

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан

В настоящей работе построена система собственных функций одной вырождающейся краевой задачи для оператора Лапласа и доказана её полнота в пространстве L_2 .

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$, $\partial\Omega = \{x : |x| = 1\}$, $x = (\tilde{x}, x_n)$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $Q = \{|\tilde{x}| < 1\}$, $\Gamma = \{|\tilde{x}| = 1\}$. Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу:

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_n^m} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial^{m-1} u(x)}{\partial x_n^{m-1}}, \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

где $1 \leq m$ — целое число.

Решением задачи (1)–(3) назовем функцию из класса $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ при $m = 1$ и $u(x) \in C^m(\bar{\Omega})$ при $m \geq 1$, удовлетворяющий условиям (1)–(3) в классическом смысле. Задача (1)–(3) представляет собой задачу с наклонной производной в n -мерной области в случае выхода направления дифференцирования в касательную плоскость. Исследования таких задач было начато в работах А. В. Бицадзе [1] и в дальнейшем проводились в работах различных авторов (см., например, [2, 3]). В работе [4] изучена вырождающаяся краевая задача с оператором высокого порядка. Спектральным вопросам задачи с наклонной производной посвящены работы [5–7].

Пусть $\{f_k(x)\}$ — система собственных функций задачи Дирихле

$$\Delta f(x) + \lambda f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$f(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5)$$

Аналогично, $\{g_i(\tilde{x})\}$ — система собственных функций следующей задачи Дирихле

$$\Delta g(\tilde{x}) + \mu g(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in Q, \quad (6)$$

$$g(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in \Gamma. \quad (7)$$

Известно, что задачи (4), (5) и (6), (7) имеют полную в L_2 систему собственных функций $\{f_k(x)\}$ и $\{g_i(\tilde{x})\}$, соответствующих собственным значениям λ_k и μ_i . В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda_k \cap \mu_i = \emptyset. \quad (8)$$

Пусть $m \geq 2$ и обозначим $t^{m,!} = \frac{t^m}{m!}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть f_i и λ_i соответственно собственные функции и собственные значения задачи (4), (5), а $W_{k,i}(x)$ — решения следующих задач:

$$\tilde{\Delta}W_{k,m}(\tilde{x}) + \lambda_k W_{k,m}(\tilde{x}) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, \quad \tilde{x} \in Q, \quad W_{k,m}(\tilde{x})|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{\Delta}W_{k,m-1}(\tilde{x}) + \lambda_k W_{k,m-1}(\tilde{x}) = -v(\tilde{x}, 0), \quad \tilde{x} \in Q, \quad W_{k,m-1}(\tilde{x})|_{\Gamma} = 0, \quad (10)$$

$$\tilde{\Delta}W_{k,m-i}(\tilde{x}) + \lambda_k W_{k,m-i}(\tilde{x}) = -W_{k,m-i+2}, \quad \tilde{x} \in Q, \quad W_{k,m-i}(\tilde{x})|_{\Gamma} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1. \quad (11)$$

Тогда функция

$$u_k(x) = \int_0^{x_n} (x_n - t)^{m-1,1} f_k(\tilde{x}, t) dt + \sum_{i=1}^m x_n^{i-1,1} W_{k,i}(\tilde{x})$$

является собственной функцией задачи (1)–(3) отвечающей собственному значению λ_k .

Теорема 2. Любая собственная функция $g_k(\tilde{x})$ задачи (6), (7) является собственной функцией задачи (1)–(3), отвечающей собственному значению μ_k .

Доказательства теорем 1 и 2 проверяются непосредственно.

Теорема 3. Система собственных функций задачи (1)–(3), состоящая из двух серий:

а) функций $u_k(x)$, соответствующих λ_k ;

б) функций $g_k(\tilde{x})$, соответствующих μ_k ;

является полной в $L_2(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что аналогичные утверждения при $m = 1$ доказаны в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Об однородной задаче с наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 4. С. 749–752.
2. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. О задаче с косою производной // Математический сборник. 1969. Т. 78, № 1. С. 148–178.
3. Алимов Ш. А. О гладкости решения вырождающиеся задачи с косою производной // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 10–22.
4. Арзикулов А. У. О гладкости решений вырождающейся краевой задачи для эллиптического уравнение // Узбекский математический журнал. 1991. № 4. С. 18–21.
5. Базык К. Н. О собственных функциях задачи с наклонной производной // Вестник МГУ. 1984. Сер. 15, № 3. С. 63–65.
6. Арзикулов А. У. О собственных функциях задачи с наклонной производной // Вопросы мат. анализа и его приложения. Самарканд, 1989. С. 4.
7. Турметов Б. Х. О собственных функциях одной вырождающейся краевой задачи для эллиптического уравнение четвертого порядка // Узбекский математический журнал. 2003. № 3, 4. С. 117–121.