УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

© А. В. Уразаева

urazaeva_anna@mail.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Обратные задачи для дифференциальных уравнений возникают во многих областях науки при попытке описать внутренние характеристики среды, в которой протекают физико-химические процессы, по результатам наблюдений над этими процессами в доступной для измерений области. Исследованию различных обратных задач для традиционных классов уравнений математической физики посвящены работы, в том числе монографии, многих авторов (см. [1, 2] и приведенную в них литературу). В последнее время активно развивается теория обратных задач для различных неклассических уравнений математической физики [3, 4].

Рассмотрим начально-краевую задачу для линеаризованной системы уравнений Осколкова

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$(\lambda - \Delta)v_t(x, t) = \nu\Delta v(x, t) - r(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (3)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (4)$$

которая в линейном приближении моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина – Фойгта порядка 1 [5]. Здесь параметры $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$ характеризуют свойства жидкости, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $v = v(x, t)$ – скорость жидкости, $r = r(x, t) = \nabla p$ – градиент давления.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^s$, $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^s : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линейала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространства $\mathbb{L}_2$. Тогда $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор. Обозначим $\mathbb{H}_0^2 = (H_0^2(\Omega))^s$, где $H_0^2(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : z(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Сужение проектора Π на пространство $\mathbb{H}_0^2$ является непрерывным оператором $\Pi_2 : \mathbb{H}_0^2 \rightarrow \mathbb{H}_0^2$, поэтому $\mathbb{H}_0^2 = \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$, где $\mathbb{H}_\sigma^2 = \ker \Pi_2$, а $\mathbb{H}_\pi^2 = \text{im} \Pi_2$. Имеют место плотное вложение $\mathcal{L} \subset \mathbb{H}_\sigma^2$ и непрерывные плотные вложения $\mathbb{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\pi$.

Положим $\mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_r$, $\mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r^2$, где $\mathbb{H}_r = \mathbb{H}_\pi$, $\mathbb{H}_r^2 = \mathbb{H}_\pi^2$. Следуя подходу С. Л. Соболева [6], используем обобщенную постановку задачи, заменив уравнение несжимаемости (4) на эквивалентное уравнение

$$\Pi_2 v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \quad (5)$$

Действительно, для функций из класса $\mathbb{H}_0^2$ равенство нулю дивергенции равносильно принадлежности подпространству $\mathbb{H}_\sigma^2$.

Лемма 1. Формулой $A = \text{diag}\{\Delta, \dots, \Delta\}$ задается линейный непрерывный оператор $A : \mathbb{H}_0^2 \rightarrow \mathbb{L}_2$ с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $-\infty$.

Обозначим $A_\sigma = A \Big|_{\mathbb{H}_\sigma^2}$, $A_\pi = A \Big|_{\mathbb{H}_\pi^2}$.

Лемма 2. Имеет место действие операторов $A_\sigma : \mathbb{H}_\sigma^2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $A_\pi : \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$, причем спектр $\sigma(A_\sigma)$ дискретен, конечнократен и сгущается к $-\infty$.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — семейство ортонормированных в смысле $\mathbb{H}_\sigma$ собственных функций оператора A_σ , занумерованных по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k\}$ с учетом их кратности.

Из наших построений следует, что векторы $v \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}$ имеют вид $v = (v_\sigma, v_\pi, v_r)$, $f = (f_\sigma, f_\pi, f_r)$, операторы

$$L = \begin{pmatrix} \lambda I - A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I - A_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \nu A_\pi & -I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Предположим, что $\lambda \notin \sigma(A)$, тогда $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_r$, $\operatorname{im} L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$.

Теорема 1. Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M является $(L, 1)$ -ограниченным, $\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\nu \lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \right\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Схожая редукция прямой начально-краевая задачи для нелинейной системы уравнений Осколкова использовалась в работах Г. А. Свиридюка (см. [7]).

В [8] была исследована корректность абстрактной обратной задаче для уравнения соболевского типа. К такой задаче редуцируем обратную задачу

$$v(x, 0) = v_0(x) \in \mathbb{H}_\sigma^2, \tag{6}$$

$$v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \tag{7}$$

$$(\lambda - \Delta)v_t(x, t) = \nu \Delta v(x, t) - r(x, t) + q(x)f(t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{8}$$

$$\Pi_2 v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \tag{9}$$

$$\int_0^T v(x, t) d\mu(t) = v_T(x) \in \mathbb{H}_\sigma^2, \quad \int_0^T r(x, t) d\mu(t) = r_T(x) \in \mathbb{H}_r, \tag{10}$$

в которой искомыми являются функции v, r, q . При этом учтено, что $\operatorname{dom} M_1 = \mathcal{U}^1 = \mathbb{H}_\sigma^2$.

Корректность обратной задачи (6)–(10) означает существование решения $q \in \mathbb{L}_2$ при любых $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $v_T \in \mathbb{H}_\sigma^2$, $r_T \in \mathbb{H}_r$, удовлетворяющего оценке $\|q\|_{\mathbb{L}_2} \leq C(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} + \|r_T\|_{\mathbb{L}_2})$.

Теорема 2. Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$, функция $f \in C^2([0, T], \mathbb{R})$, функция $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача (6)–(10) корректна в том и только в том случае, когда для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\chi \left(\frac{\nu \lambda_k}{\lambda - \lambda_k} \right), \int_0^T f(t) d\mu(t) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 2000.
3. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. Al Horani M., Favini A. An identification problem for first-order degenerate differential equations // J. of Optimization Theory and Applications. 2006. V. 130, N 1. P. 41–60.
5. Осколков А. П. Начально краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С.126–164.
6. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
7. Свиридюк Г. А. Об одной задаче динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 11. С. 1992–1998.
8. Fedorov V. E., Urazaeva A. V. An inverse problem for linear Sobolev type equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12, N 4. P. 387–395.