Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 324–325

УДК 517.946

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ, СООТВЕТСТВУЮЩИМ ДВИЖУЩИМСЯ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

© Г. У. Уразбоев

gayrat71@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается цепочка Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \dfrac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} \left(f_{n+1}^i g_{n+1}^i - f_n^i g_n^i\right), \\ \dfrac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} \left(f_n^i g_{n+1}^i + f_{n+1}^i g_n^i\right) - a_{n-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(f_n^i g_{n-1}^i + f_{n-1}^i g_n^i\right), \\ a_{n-1} f_{n-1}^k + b_n f_n^k + a_n f_{n+1}^k = \lambda_k f_n^k, \\ a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \ \ k = 1, 2, .., N, \ \ n \in Z, \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$a_n(0) = a_n^0, \ \ b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z. \tag{2}$$

Начальные данные $\{a_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$ обладают следующими свойствами

1. $a_n^0 > 0, \ \ \Im b_n^0 = 0, \quad n \in Z$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\, n\, | \left(\left| a_n^0 - \dfrac{1}{2} \right| + \left| b_n^0 \right| \right) < \infty$,

2. Дискретное уравнение Штурма – Лиувилля $a_{n-1}^0 y_{n-1} + b_n^0 y_n + a_n^0 y_{n+1} = \lambda y_n$, $n \in Z$, имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots, N$ — неизвестные функции, причём $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ суть собственные векторы оператора

$$L(t)y \equiv a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_k = \dfrac{z_k + z_k^{-1}}{2}$, $\quad k = 1, 2, \dots, N$, а $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ — линейно независимые с $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ решения уравнения

$$a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \ \ k = 1, 2, .., N, \ \ n \in Z.$$

Предполагается, что

$$W\left\{f_n^k, \ g_n^k\right\} \equiv a_n \left(f_n^k g_{n+1}^k - f_{n+1}^k g_n^k\right) = \omega_k(t), \ \ k = 1, 2, \dots, N, \tag{3}$$

где $\omega_k(t)$ — изначально заданные непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию

$$\left| \frac{\lambda_k(0)}{2} + \int\limits_0^t \omega_k(t) dt \right| > \frac{1}{2}, \ \ k = 1, 2, \dots, N, \tag{4}$$

при всех неотрицательных значениях t.

Решение задачи (1)–(4) ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$a_n(t) > 0,\ \Im b_n = 0,\ \ n \in Z, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, n\,| \left(\left| a_n(t) - \frac{1}{2} \right| + |\, b_n\,(t)| \right) < \infty\,. \tag{5}$$

В данной работе получены представления для решений $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, задачи (1)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

В работах [1, 2] было показано, что цепочка Тоды без источника может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния для разностного оператора Штурма – Лиувилля $L(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, № 2(8). С. 543–555.
2. *Flaschka H.* Progr. on the Toda Lattice. II // Theor. Phys. 1974. V. 51, № 3. P. 703–716.
3. *Mel'nikov V. K.* Creation and annihilation of solution in the system described by the KdV equation with self-consistent source // Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 809–823.
4. *Уразбоев Г. У., Хасанов А. Б.* Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа "ступеньки" // ТМФ. 2001. Т. 129, № 1. С. 38–54.