

УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСКА – ЛЯВА НА ГРАФЕ

© А. А. Замышляева

alzama@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Рассматривается уравнение Буссинеска – Лява [1]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u, \quad (1)$$

описывающее продольные колебания графа, состоящего из упругих стержней. Г. А. Свиридюк [2] впервые рассмотрел начально-краевую задачу для полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка на графе. Многомерное, вообще говоря, уравнение (1) удается свести к одномерному уравнению, определенному на ориентированном графе. Пусть $G = G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$. На графе G нас будут интересовать задача с краевыми

$$u_j(0, t) = u_k(l_k, t), \quad E_j, E_k \in E^\alpha(V_i) \cup E^\omega(V_i); \quad (2)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} u_{kx}(l_k, t) = 0 \quad (3)$$

и начальными

$$u_j(t, 0) = u_{j0}(x), \quad u_{jt}(t, 0) = u_{j1}(x), \quad x \in (0, l_j) \quad (4)$$

условиями для уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j). \quad (5)$$

Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i . Условие (2) требует, чтобы все решения были непрерывными на вершинах графа, а (3) — аналог условия Кирхгоффа — в случае, когда граф состоит из единственной дуги с двумя вершинами, превращается в условие Неймана.

Задачу (2)–(4) для уравнения (3) удалось редуцировать к задаче Коши для уравнения соболевского типа второго порядка и применить абстрактные результаты о морфологии фазового пространства такого уравнения [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. Свиридюк Г. А. Уравнения соболевского типа на графах // Некласс. уравн. матем. Физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 221–225.
3. Замышляева А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислит. технол. 2003. Т. 8, № 4. С. 45–54