Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 152–153

УДК 530.1+519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОКИНЕТИКИ ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД

© Б. М. Жапбасбай, Х. Х. Имомназаров *

* imom@omzg.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Постановка задачи. Пусть область $\Omega \subset R^2$ заполнена проводящей пористой средой, насыщенной проводящей жидкостью. Электрокинетические явления в такой среде описываются краевой задачей [1, 2]

$$-\mathrm{div}\left(\frac{1}{\chi\,\rho_0}\nabla p - \frac{\gamma}{\chi}\nabla\phi\right) = f_p, \qquad -\mathrm{div}\left(\frac{\gamma}{\chi\,\rho_0}\nabla p + \frac{\sigma\,\chi-\gamma^2}{\chi}\nabla\phi\right) = f_\phi, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{\chi\,\rho_0}\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\gamma}{\chi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\,|_{\partial\Omega} = g_p, \qquad -\frac{\gamma}{\chi\,\rho_0}\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\sigma\,\chi-\gamma^2}{\chi}\frac{\partial\phi}{\partial n}\,|_{\partial\Omega} = g_\phi, \tag{2}$$

где $p(\mathbf{x})$ — поровое давление, $\phi(\mathbf{x})$ — потенциал электрического поля, $f_p(\mathbf{x})$ и $f_\phi(\mathbf{x})$ — источники фильтрационной и электрической природы соответственно, $\chi(\mathbf{x})$ — коэффициент трения, $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_l(\mathbf{x}) + \sigma_s(\mathbf{x})$, $\sigma_l(\mathbf{x})$ и $\sigma_l(\mathbf{x})$ — проводимости упругого пористого тела и жидкости соответственно, $\gamma(\mathbf{x})$ — электрокинетический коэффициент, $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_{0,l}(\mathbf{x}) + \rho_{0,s}(\mathbf{x})$, $\rho_{0,s}(\mathbf{x}) = \rho^f_{0,s}(\mathbf{x})(1-d_0(\mathbf{x}))$, $\rho_{0,l}(\mathbf{x}) = \rho^f_{0,l}(\mathbf{x})d_0(\mathbf{x})$, $\rho^f_{0,s}(\mathbf{x})$ и $\rho^f_{0,l}(\mathbf{x})$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, $d_0(\mathbf{x})$ — пористость, функции $g_p(\mathbf{x})$ и $g_\phi(\mathbf{x})$ удовлетворяют интегральным соотношениям

$$\int_{\partial\Omega} g_p\,d\omega = 0, \qquad \int_{\partial\Omega} g_\phi\,d\omega = 0. \tag{3}$$

Решение прямой задачи электрокинетики в прямоугольной области. Построим аналитическое решение задачи электрокинеки для прямоугольной области $\Omega = [0,a]\times[0,b]$ и в отсуствии источников. Решение данной задачи имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} p(x,y) = p_0 &- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^p_n}{\lambda_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B^p_n}{\lambda_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{b}x\right]\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^p_n}{\mu_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D^p_n}{\mu_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{a}y\right]\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = \phi_0 &- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^\phi_n}{\lambda_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B^\phi_n}{\lambda_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{b}x\right]\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^\phi_n}{\mu_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D^\phi_n}{\mu_n}\cosh\left[\frac{n\pi}{a}y\right]\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где коэффициенты

$$A^p_n = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_p(0,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi, \quad B^p_n = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_p(a,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi,$$

$$C^p_n = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_p(\xi,0)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi, \quad D^p_n = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_p(\xi,b)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi,$$

$$A_n^{\phi} = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_{\phi}(0,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi, \quad B_n^{\phi} = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_{\phi}(a,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi,$$

$$C_n^{\phi} = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_{\phi}(\xi,0)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi, \quad D_n^{\phi} = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_{\phi}(\xi,b)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi,$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a}\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right),$$

$$\acute{g}_p = -\gamma\frac{\rho_0}{\sigma}g_{\phi} - \frac{\rho_0}{\sigma}(\sigma\chi - \gamma^2)g_p, \qquad \acute{g}_{\phi} = -\frac{1}{\sigma}g_{\phi} + \frac{\gamma}{\sigma}g_p.$$

Численное моделирование прямой задачи электрокинетики. При построения разностной схемы уравнений (1)–(2) в двумерном случае, использовался интегро-интерполяционный метод [4] на равномерной по каждому направлению сеточной области $\overline{\Omega}$, полученная СЛАУ решалась методом неполной факторизации [5].

Приведем результаты численного моделирования для уравнений (1)–(2) ($f_p(\mathbf{x}) = 0$ и $f_{\phi}(\mathbf{x}) = 0$). Размер разностной области брался по пространству 129x129 узла, $\Omega = [0,1]\times[0,1]$.

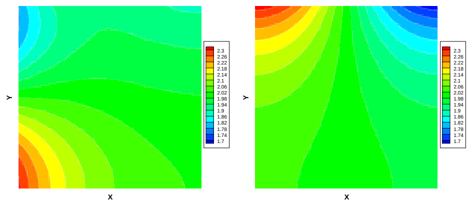

Рис. 1. Распределение давления (слева) и потенциала электрического поля (справа).

Работа выполнена при финансовой поддержке проектов РАН № 16.12 и СО РАН № 1.6, 42, а также гранта Фонда содействия отечественной науке (“Доктора наук РАН”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dorovsky V. N., Imomnazarov Kh. Kh.* A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium // Mathl. Comput. Modelling. 1994. V. 20, N 7. P. 91–97.
2. *Имомназаров Х. Х.* Модифицированные законы Дарси, учитывающие электромагнитные поля // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 1. С. 33–34.
3. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численный методы математической физике. 2-е изд. М.: Научный мир, 2003. 316 с.
5. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.