

УДК 517.9

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© О. Г. Жукова*, Р. К. Романовский

*ogzh@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск

Рассматривается краевая задача, моделирующая процесс теплопереноса в стержне при заданном температурном режиме на концах в рамках гиперболического закона теплопроводности [1]:

$$\begin{cases} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, & \tau \frac{\partial q}{\partial t} + k \frac{\partial T}{\partial x} + q = 0, & (x, t) \in [-l, l] \times [0, \infty), \\ (T, q)_{t=0} = (0, 0), & T(-l, t) = \mu_1(t), & T(l, t) = \mu_2(t), & \mu_1(0) = \mu_2(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь T , q — температура и тепловой поток, c , ρ , k — удельная теплоемкость, плотность, удельная теплопроводность, τ — период релаксации, μ_1 , μ_2 — заданные непрерывные функции. Краевая задача (1) однозначно разрешима (в обобщенном смысле) в классе непрерывных функций с некоторыми дополнительными условиями гладкости [2, 3].

В рамках модели (1) тепловой импульс распространяется с конечной скоростью $a = \sqrt{k/(\tau c \rho)}$. Зафиксируем

$$t^* \in [l/a, 2l/a], \quad T^*(x) \in C[-l, l].$$

За время t^* идущие от концов стержня тепловые импульсы успевают пройти не менее половины стержня точно один раз. Будем называть пару функций (μ_1, μ_2) управлением. Поставим задачу вычисления управления (μ_1, μ_2) на отрезке $[0, t^*]$, обеспечивающего в рамках модели (1) выполнение равенства

$$T(x, t^*) = T^*(x), \quad x \in [-l, l].$$

В римановых инвариантах $u_1 = T + \beta q$, $u_2 = T - \beta q$, $\beta = \sqrt{\tau/(k c \rho)}$ гиперболическая система (1) принимает вид

$$Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x} + B \right) u = 0, \quad A = \text{diag}(a, -a), \quad B = \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица Римана второго рода гиперболического оператора L дается формулой (см. [3])

$$V(x, t) = (v_{ij}) = \exp(-t/(2\tau)) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{at+x}{at-x}} I_1\left(\frac{r}{2\tau}\right) & I_0\left(\frac{r}{2\tau}\right) \\ I_0\left(\frac{r}{2\tau}\right) & \sqrt{\frac{at-x}{at+x}} I_1\left(\frac{r}{2\tau}\right) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $r = \sqrt{t^2 - (x/a)^2}$, $I_k(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента [4].

Представим функцию $T^*(x)$ в виде

$$\begin{cases} T^* = T_1 + T_2, & T_k \in C[-l, l], \\ T_1 = 0 \text{ на } [-l + at^*, l], & T_2 = 0 \text{ на } [-l, l - at^*]. \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} K_1(s, t) &= \sum v_{i1}(-l + at^* - s, t), \quad K_2(s, t) = -\sum v_{i2}(l - at^* - s, t), \\ M_1(x, s) &= \sum v_{i1}(x + at^* - s, t^*), \quad M_2(x, s) = -\sum v_{i2}(x - at^* - s, t^*), \end{aligned} \quad (4)$$

где v_{ij} — элементы матрицы (2).

Теорема. Каждой паре (T_1, T_2) функций (3) отвечает точно одно решение (μ_1, μ_2) поставленной задачи управления. Имеют место формулы

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{1}{2} \left[\exp(-t/(2\tau)) \varphi(-l - a(t - t^*)) + \int_{-l-a(t-t^*)}^{-l+at^*} K_1(s, t) \varphi(s) ds \right], \\ \mu_2(t) &= \frac{1}{2} \left[\exp(-t/(2\tau)) \psi(l + a(t - t^*)) + \int_{l+a(t-t^*)}^{l-at^*} K_2(s, t) \psi(s) ds \right], \end{aligned}$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ — решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода на $[-l, l]$

$$\begin{aligned} \exp(-t^*/(2\tau)) \varphi(x) + \int_x^{-l+at^*} M_1(x, s) \varphi(s) ds &= 2T_1(x), \\ \exp(-t^*/(2\tau)) \psi(x) + \int_x^{l-at^*} M_2(x, s) \psi(s) ds &= 2T_2(x), \end{aligned}$$

K_i, M_i — функции (4).

Обоснование проводится по схеме, близкой к примененной в работе [3], где рассматривается задача граничного управления процессом теплопереноса в полубесконечном стержне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э. М., Ремизова О. И. // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2002. № 3. С. 146–156.
2. Воробьева Е. К., Романовский Р. К. // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 531–540.
3. Романовский Р. К., Жукова О. Г. // Докл. АН ВШ РФ. 2006. № 1 (6). С. 69–77.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.